Dans les ouvrages de la collection

ESSEBIL AU BAC – Mathématiques

vous trouverez chaque trimestre:
Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules,
Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme,
Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances,
Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac.

L'AUTEUR
Dr. Horma Ould Hamoud

•Titulaire d'un CAPES de l'ENS (Nouakchott,1990),
•Docteur en Mathématiques (Spécialité Algèbre, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal, 2002),
•Précédemment enseignant à l'ENS et à l'Université de Nouakchott (FST et FSJE),
•Inspecteur de Mathématiques depuis janvier 2002 en service à l'Inspection Générale de l'Education Nationale (Nouakchott, Mauritanie),
•Coordinateur de la commission de réécriture des programmes de mathématiques et informatique de l'enseignement secondaire.
•Formateur de professeurs et producteur de ressources éducatives et numériques (curriculum, documents d'accompagnement, supports de formation, cours en ligne, formation à distance, applications mobiles, etc ...),
•Membre de la commission nationale chargée des olympiades et rallyes de Maths. Coordinateur de l'équipe de mathématiques.
•Auteur de plusieurs manuels scolaires de mathématiques (cours, exercices corrigés, formulaire, ...) du collège à la terminale,
•Président et membre fondateur de l'ONG Association des Amis de Mathématiques (AMIMATH),

•Site web : https://maurimath.net/



REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
ET DE LA FORMATION TECHNIQUE ET PROFESSIONNELLE
INSPECTION GENERALE



Collection Essebil السبيل au Bac

Mathématiques

Tome 2

Lorem ipsum

Analyse et probabilités

7D

Résumés de cours
QCM
Exercices Corrigés
Exercices de synthése

Horma Hamoud
Inspecteur



MATHS

TERMINALE D

Tome 2
Analyse et probabilités

Horma Ould Hamoud
Inspecteur de Mathématiques

02_Maths SN 2 Inner.indd 1 15/02/21 1:47 pm

Dans les ouvrages de la collection ESSEBIL AU BAC- Mathématiques vous trouverez :

- ***Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules ;***
- ***Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme ;***
- ***Des exercices corrigés variés et progressifs pour tester et approfondir vos connaissances ;***
- ***Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer efficacement l'épreuve du Bac ;***
- ***Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.***

Dépôt légal : 2176/2020

Bibliothèque nationale - Nouakchott

Chers élèves de la 7ème AS,

Nous sommes heureux de mettre à votre disposition cette nouvelle collection, "ES-SEBIL au bac", qui constituera, nous l'espérons, un réel cheminement au succès.

A travers cette collection, le Département cherche, à court terme, à améliorer l'enseignement/apprentissage afin d'avoir, de manière concrète, un impact positif sur le niveau des apprenants.

Cette collection touche le programme en vigueur dans toutes ses dimensions aussi bien théoriques que pratiques: rappels de cours, exercices corrigés et exercices d'entrainement. Elle couvre toutes les disciplines de bases, toutes séries confondues: sciences de la nature (SN), mathématiques (M) et lettres (LM et LO).

Permettez-nous, ici, d'exprimer nos sincères remerciements à nos frères inspecteurs pour leurs efforts vivement louables et sincèrement reconnus.

Nous vous souhaitons, chers candidats au bac, plein succès et réussite et prions qu'Allah, le Tout-Puissant, vous aide à en tirer profit.

وعلى الله قصد السبيل

L'Inspecteur Général

Sommaire

CHAPITRE 4 : PRIMITIVES ET INTEGRALES

I. RESUME DE COURS

I. Primitives

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que F'=f sur I.

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \text{ F est dérivable sur I,} \\ \bullet \text{ F}' = \text{f sur I.} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \boxed{\text{F est une primitive de f sur I}}$$

2. Propriétés

1) Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

2) Soit F une primitive de f sur un intervalle I ; alors :

*** Pour tout réel k, la fonction G=F+k est aussi une primitive de f sur I.**

**** Toute primitive de f sur I est de ce type.**

3) Etant donné un réel x_0 de I et un réel quelconque y_0, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$. Autrement dit, Une seule des courbes passe par un point donné $M_0(x_0, y_0)$.

4) Toute primitive F de f sur un intervalle I est continue sur I.

3. Tableau des primitives usuelles.

Fonction f	Primitives de f	Commentaire
$x \mapsto a$, a réel constant	$x \mapsto ax + k$	Sur $I = \mathbb{R}$
$x \mapsto ax^n$; $n \neq -1$ entier relatif	$x \mapsto \frac{a}{n+1}x^{n+1} + k$	Sur $\mathbb{R}$, si $n \in \mathbb{N}$ Sur $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$, si $n \leq -2$.
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{-1}{x} + k$	Sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$	Sur $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$x \mapsto \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + k$	Sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

4. Opérations sur les primitives :

Soient u et v des fonctions dérivables de dérivées continues sur un intervalle sur I.

Fonction f	Une primitive de f
au', a réel	au
$u'+v'$	$u+v$
$u'u^n$; $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$v'\times(u'ov)$	uov
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'\times e^u$	e^u

II – Intégrale

1. Définition et propriétés

1) Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b des réels de I. On appelle Intégrale de a à b de f le nombre réel noté $\int_a^b f(t)dt$ et défini par F(b)-F(a) où F est une primitive quelconque de f sur I.

f est continue, de primitive F sur un intervalle I, et $a,b \in I$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = ... = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Propriétés

2.1) Propriétés algébriques immédiates

. $\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$; **(Relation de Chasles).**

2.2) Linéarité de l'intégrale

$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx; \quad \lambda \in IR$

$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2.3) Positivité de l'intégrale

• f est continue sur $[a,b]$,
• f est positive sur $[a,b]$.
$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx \geq 0}$

• f et g sont continues sur $[a,b]$,
• $f \leq g$ sur $[a,b]$.
$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx}$

2.4) Inégalité de la moyenne

• f est continue sur $[a,b]$,
• $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a,b]$.
$\Rightarrow \boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)}$

2.5) Parité, périodicité et intégration

• f est continue sur $[-a,a]$,
• f est paire.
$\Rightarrow \boxed{\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt}$

- f est continue sur $[-a,a]$,
- f est impaire.

$\Rightarrow \boxed{\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0}$

- f est continue sur $\mathbb{R}$,
- f est périodique de période T.

$\Rightarrow \boxed{\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt}$

3. Valeur moyenne d'une fonction f sur un segment [a, b]

- f est continue sur $[a,b]$,
- $a < b$,
- $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$

$\Rightarrow$ le nombre réel μ est appelé valeur moyenne de f sur $[a,b]$

- f est continue sur $[a,b]$,
- $a < b$.

$\Rightarrow$ il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

4. Intégration par parties

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

En abrégé : $\int uv' = uv - \int u'v$

5. Intégration par changement de variable

$$\int_a^b f(g(x))\times g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

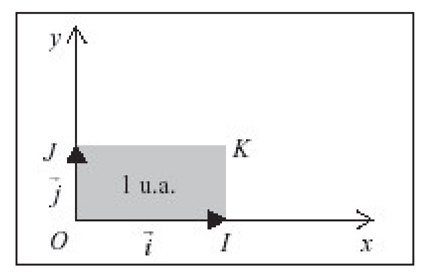
Disposition pratique de calcul :

En posant $t = g(x)$**, on obtient :**

$$\begin{cases} x = a \Rightarrow t = g(a) \\ x = b \Rightarrow t = g(b) \end{cases} ; \text{ et } \quad dt = g'(x)dx.$$

6. Calcul d'aire

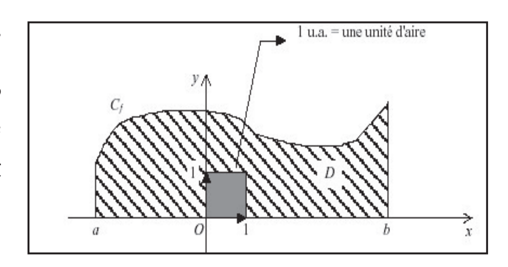
Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient I, J et K les points définis par :
$\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OK}=\vec{i}+\vec{j}$.



On appelle unité d'aire (notée en abrégé u.a.) l'aire du rectangle construit à partir des points OIJK.

$\text{Aire}(\text{rectangle OIKJ}) = \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| = 1$ ua

Théorème



Soit f une fonction continue et positive sur le segment [a, b] avec $a\le b$. L'aire, exprimée en u.a., du domaine D délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$ est calculée par $\int_a^b f(t)dt$.

Remarques

1) Le domaine en question peut être décrit comme l'ensemble des points M(x,y) tels que: $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$.

2) Soit f une fonction continue et négative sur le segment [a, b].
L'aire, exprimée en u.a., du domaine D délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations x =a et x =b est égale à $A = -\int_a^b f(x)dx \times u.a$.

3) Soient f et g deux fonctions continues et définies sur un segment [a, b]. On suppose que $f \ge g$ sur [a, b]. L'aire A du domaine D délimité par les courbes C_f, C_g, et les deux droites verticales d'équations x =a et x =b est donnée, en u.a., par : $A = \int_a^b (f(x)-g(x))dx \times u.a$.

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Choisir la bonne réponse :

1	Une primitive de la fonction $x \mapsto 3x^2 + 2x + 5$ sur $\mathbb{R}$ est	
	Réponse A	$x \mapsto \frac{3}{4}x^4 + x^2 + 5x$
	Réponse B	$x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x$
	Réponse C	$x \mapsto x^3 + x^2 + 5x + 8$
	Réponse D	$x \mapsto x^3 + x^2 - 5x + k$

2	Une primitive de la fonction $x \mapsto 6x\cos(3x^2)$ sur $\mathbb{R}$ est	
	Réponse A	$x \mapsto 6x\sin(3x^2)$
	Réponse B	$x \mapsto \sin(3x^2)$
	Réponse C	$x \mapsto 3x^2\sin(3x^2)$
	Réponse D	$x \mapsto 3x^2\sin(x^3)$

3	Une primitive de la fonction $x \mapsto 3x(3x^2+1)^{2020}$ sur $\mathbb{R}$ est	
	Réponse A	$x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{1}{2021}(3x^2+1)^{2021}$
	Réponse B	$x \mapsto \frac{1}{3} \times \frac{1}{2021}(3x^2+1)^{2021}$
	Réponse C	$x \mapsto \frac{3}{2} \times \frac{1}{2021}(3x^2+1)^{2021}$
	Réponse D	$x \mapsto \frac{3}{2}x^2 \times \frac{1}{2021}(3x^2+1)^{2021}$

4	Une primitive de la fonction $x \mapsto \sin x \cos x$ sur $\mathbb{R}$ est	
	Réponse A	$x \mapsto -\cos x \sin x$
	Réponse B	$x \mapsto \frac{1}{2}\cos^2 x$
	Réponse C	$x \mapsto \frac{1}{2}\sin^2 x$
	Réponse D	$x \mapsto \frac{-1}{2}\cos^2 x$

5	Une primitive de la fonction $x \mapsto \tan^2 x$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ est	
	Réponse A	$x \mapsto \frac{1}{3}\tan^3 x$
	Réponse B	$x \mapsto 1+\tan^2 x$
	Réponse C	$x \mapsto x+\tan x$
	Réponse D	$x \mapsto -x+\tan x$

6	Une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ sur $]0;+\infty[$ est	
	Réponse A	$x \mapsto \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$
	Réponse B	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
	Réponse C	$x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$
	Réponse D	$x \mapsto \frac{3}{2}(x+1)\sqrt{x+1}$

QCM 2

Choisir la bonne réponse :

1	Soit $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{11}dt$. Alors :	
	Réponse A	$0<I<1$
	Réponse B	$-1<I<0$
	Réponse C	$I=0$
	Réponse D	$I=\frac{\pi}{12}$

2	La valeur moyenne de la fonction $f(x)=\cos x$ sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ est égale à :	
	Réponse A	$\frac{\sqrt{3}-1}{6\pi}$
	Réponse B	$\frac{1-\sqrt{3}}{3\pi}$
	Réponse C	$\frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi}$
	Réponse D	$\frac{\sqrt{3}+1}{3\pi}$

3	Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n dt$. Alors la suite (U_n) est :	
	Réponse A	croissante
	Réponse B	décroissante
	Réponse C	non monotone
	Réponse D	divergente

4	Pour tout réel x on pose $F(x)=\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$. Alors la fonction F est :	
	Réponse A	positive sur $\mathbb{R}$
	Réponse B	croissante sur $\mathbb{R}$
	Réponse C	décroissante sur $\mathbb{R}$
	Réponse D	paire

5	Pour tout entier naturel n on pose $U_n=\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$. Alors on a :	
	Réponse A	$U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+1}$
	Réponse B	$U_{n+1}+U_n=\frac{1}{n+1}$
	Réponse C	$U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+2}$
	Réponse D	$U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+3}$

6	Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a toujours :	
	Réponse A	$\int_0^1 f(t)\times g(t)dt=\int_0^1 f(t)dt\times\int_0^1 g(t)dt$
	Réponse B	$\int_0^1 (f(t)+g(t))dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 g(t)dt$
	Réponse C	$\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}dt=\frac{\int_0^1 f(t)dt}{\int_0^1 g(t)dt}$
	Réponse D	$\int_0^1 \sqrt{f(t)}dt=\sqrt{\int_0^1 f(t)dt}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Sur un intervalle précisé, calculer une primitive des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 3$$

$$f_2(x) = 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{x^5} + 4x - 1$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$$

Exercice 2

Sur un intervalle précisé, calculer une primitive des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = 5x^7(x^8+1)^{3000}$$

$$f_2(x) = \tan^{2020} x + \tan^{2022} x$$

$$f_3(x) = \frac{6x^2+4x+4}{x^2(x+2)^2}$$

Exercice 3

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une.

$$f_1(x) = \cos x\sqrt{4-\sin x}$$

$$f_2(x) = \frac{3\sin x}{\sqrt{8+2\cos x}}.$$

Exercice 4

Soit la fonction f définie par: $f(x) = \cos x \sin x(\cos^{10} x + \sin^{10} x)$

1) Déterminer une primitive de f.

2) Calculer $I=\int_0^{\pi} f(x)dx$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a ; b et c tels que : $\forall x\in D_f, f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$

2) En déduire une primitive de f.

Exercice 6

Soit la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par: $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

On pose $I=\int_0^1 \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$:;. $J=\int_0^1 \dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$

Calculer f'(x); en déduire I et J.

Exercice 7

On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$;

1) Calculer I+J

2) En utilisant une intégration par parties, calculer I-J ,

3) En déduire I et J.

Exercice 8

On pose $I=\int_0^1 x^2(x-1)^{2022}dx$

1)Déterminer les réels a; b et c tels que : $\forall x\in IR,\quad x^2=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

2) En déduire I.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) On constate que la fonction $f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 3$ est la somme de fonctions continues sur $]0;+\infty[$ et de primitives usuelles :

$$f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + 5 \times \frac{-1}{x^2} + 3.$$

En consultant la table des primitives on trouve qu'une primitive de f_1 sur $]0;+\infty[$ est: $F_1(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3} \times 2\sqrt{x} + 5 \times \frac{1}{x} + 3x$.

2) Pour f_2 on peut écrire $f_2(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-5} + 4x - 1$.

On sait qu'une fonction du type $x \mapsto ax^n, n \neq -1$ a une primitive du type $x \mapsto \frac{a}{n+1}x^{n+1}$.

Alors une primitive de f_2 sur $]0;+\infty[$ est:

$$F_2(x) = \frac{2}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + \frac{3}{-4}x^{-4} + \frac{4}{2}x^2 - x$$

Soit $$F_2(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{4}x^{-4} + 2x^2 - x$$

Enfin $$F_2(x) = \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{3}{4x^4} + 2x^2 - x.$$

3) En consultant la table des primitives on trouve qu'une primitive de la fonction $f_3(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ est :

$$F_3(x) = \tan x + \frac{7}{2}\cos 2x.$$

Corrigé 2

Dans chaque cas, on procède à un changement d'écriture pour faire apparaître une forme de primitive usuelle :

1) $f_1(x) = 5x^7(x^8+1)^{3000}$

On a $f_1(x) = \dfrac{5}{8} \times 8x^7(x^8+1)^{3000}$

Il est clair qu'on va utiliser la forme $u'u^n$ pour obtenir la primitive $F_1(x) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{1}{3001}(x^8+1)^{3000}$ de f_1 sur $\mathbb{R}$.

2) On a $f_2(x) = \tan^{2020} x + \tan^{2022} x$.

On peut écrire $f_2(x) = (1+\tan^2 x)\tan^{2020} x$.

On sait qu'une fonction du type $u'u^n, (n \neq -1)$ a une primitive de la forme $\dfrac{1}{n+1}u^n$.

Alors on trouve que la fonction $F_2(x) = \dfrac{1}{2021}(\tan x)^{2021}$ est une primitive de f_2 sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3) On a $f_3(x)=\dfrac{6x^2+4x+4}{x^2(x+2)^2}$.

Pour tout réel strictement positif, on peut procéder à une décomposition d'éléments simples en écrivant:

$$f_3(x)=\frac{5x^2+x^2+4x+4}{x^2(x+2)^2}$$

$$f_3(x)=\frac{5x^2+(x+2)^2}{x^2(x+2)^2}$$

$$f_3(x)=\frac{5x^2}{x^2(x+2)^2}+\frac{(x+2)^2}{x^2(x+2)^2}$$

Enfin, $f_3(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{x^2}$.

On sait qu'une fonction du type $\dfrac{u'}{u^2}$ **a une primitive de la forme** $\dfrac{-1}{u}$.

Donc, une primitive de $f_3(x)=\dfrac{6x^2+4x+4}{x^2(x+2)^2}$ **sur** $]0;+\infty[$ **est :**

$$F_3(x)=-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{x}$$

Corrigé 3

Chacune des fonctions f_1 **et** f_2 **est continue sur** $\mathbb{R}$ **. Alors elle admet des primitives sur** $\mathbb{R}$ **.**

1) On peut écrire $f_1(x)=-(-\cos x)\sqrt{4-\sin x}$

$f_1(x) = -(-\cos x)(4-\sin x)^{\frac{1}{2}}$

On sait qu'une fonction du type $u'u^n, (n \neq -1)$ a une primitive de la forme $\frac{1}{n+1}u^n$.

Alors on trouve que la fonction $F_1(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(4-\sin x)^{\frac{1}{2}+1}$ est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$.

Soit $F_1(x) = -\frac{2}{3}(4-\sin x)\sqrt{4-\sin x}$

2) On peut aussi écrire $f_2(x) = -3 \times \frac{-2\sin x}{2\sqrt{8+2\cos x}}$ pour faire apparaître la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ dont la primitive est du type $\sqrt{u}$.

Alors la fonction $F_2(x) = -3\sqrt{8+2\cos x}$ est une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$.

Corrigé 4

1) On développe l'expression de $f(x)$:

$f(x) = \cos x \sin x(\cos^{10} x + \sin^{10} x) \Leftrightarrow f(x) = \sin x \cos^{11} x + \cos x \sin^{11} x$.

Alors on peut écrire : $f(x) = -(-\sin x)\cos^{11} x + \cos x \sin^{11} x$

On sait qu'une fonction du type $u'u^n, (n \neq -1)$ a une primitive de la forme $\frac{1}{n+1}u^n$.

Alors on trouve que la fonction $F(x) = \frac{-1}{12}\cos^{12} x + \frac{1}{12}\sin^{12} x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) On a $\int_0^{\pi} f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^{\pi}$

Donc $\quad I = \left(\frac{-1}{12}\cos^{12}\pi + \frac{1}{12}\sin^{12}\pi\right) - \left(\frac{-1}{12}\cos^{12}0 + \frac{1}{12}\sin^{12}0\right)$

Enfin $\quad I = 0$.

Corrigé 5

La fonction f est définie par: $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3}{(x+1)^2}$.

1) On peut écrire $\quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 4}{(x+1)^2}$

$f(x) = \frac{(x+1)^3 - 4}{(x+1)^2}$

$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)^2}$

Donc $\quad f(x) = x + 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$ pour tout réel x strictement positif.

Donc $a = 1; b = 1; c = -4$.

2) On sait qu'une primitive de $x \mapsto x + 1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x$

Une primitive de $x \mapsto -\frac{4}{(x+1)^2}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est $x \mapsto \frac{4}{x+1}$.

On en déduit que la fonction $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{4}{x+1}$ est une primitive de la fonction $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Corrigé 6

1) On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

Donc $f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

L'intégrale $I=\int_0^1\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ peut être transformée sous la forme :

$I=\int_0^1\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})dx$ du type $I=\int_0^1 f'(x)f(x)dx$.

D'où $I=\left[\frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2\right]_0^1$. Alors $I=\left[\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2\right]_0^1$.

$I=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{2}(1)^2$

$I=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}$. Enfin $I=1+\sqrt{2}$.

L'intégrale $J=\int_0^1\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$ peut être transformée sous la forme :

$$J = \int_0^1 \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2} dx$$

d'où $J = \int_0^1 f'(x) \frac{1}{f^2(x)} dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx$.

$$J = \left[\frac{-1}{f(x)} \right]_0^1$$

$$J = \left[\frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} \right]_0^1$$

$$J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1 \ .$$

Enfin $J = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Corrigé 7

1) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x + x\cos^2 x)dx$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x + \cos^2 x)dx$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$$

$$I + J = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I + J = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2 \right)$$

$$I + J = \frac{\pi^2}{8}.$$

2) On a $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x - x\cos^2 x)dx$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x - \cos^2 x)dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x\cos 2x)dx$$

On utilise une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = -x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$

$$I - J = \left[-x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{1}{2}\sin 2x)dx$$

$$I - J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)dx$$

$$I - J = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I - J = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0$$

$$I - J = \frac{1}{2}$$

On résout le système : $\begin{cases} I+J=\dfrac{\pi^2}{8} \\ I-J=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Par addition : $2I=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{1}{2} \Rightarrow I=\dfrac{\pi^2+8}{16}$

Par soustraction : $2J=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{1}{2} \Rightarrow J=\dfrac{\pi^2-8}{16}$.

Corrigé 8

1) On peut écrire pour tout réel x :

$x^2=((x-1)+1)^2=(x-1)^2+2(x-1)+1$. Donc $a=1; b=2; c=1$

2) On remplace $x^2=((x-1)+1)^2=(x-1)^2+2(x-1)+1$ dans l'intégrale $I=\int_0^1 x^2(x-1)^{2022}dx$ par son écriture trouvée dans 1) :

$$I=\int_0^1\left((x-1)^2+2(x-1)+1\right)(x-1)^{2022}dx$$

On développe $I=\int_0^1\left((x-1)^{2024}+2(x-1)^{2023}+(x-1)^{2022}\right)dx$

Comme la dérivée de $(x-1)$ est 1, les termes à intégrer sont tous du type $u'u^n$ de primitive $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$:

$$I=\left[\frac{1}{2025}(x-1)^{2025}+\frac{2}{2024}(x-1)^{2024}+\frac{1}{2023}(x-1)^{2023}\right]_0^1$$

$$I=-\frac{1}{2025}+\frac{2}{2024}-\frac{1}{2023}.$$

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Sur un intervalle précisé, calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 4x^5 - \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3x^2} + 3x - \frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = 9x^5(2x^6+1)^{1000}$$

$$f_3(x) = 5x\sqrt{3x^2+1}$$

$$f_4(x) = 7x\sqrt[3]{3x^2+1}$$

$$f_5(x) = \tan^2 x + \tan^4 x$$

Exercice 2

Calculer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$f_1(x) = 5x\sqrt{x+1}$$

$$f_2(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+5}{\sqrt{x+1}}$$

$$f_3(x) = \frac{3x^2-6x+9}{2x^2(x-3)^2}$$

Exercice 3

On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{x\sin x\cos x - \sin^2 x}{x^3}dx$ **.**

1) Calculer la dérivée de la fonction $u(x) = \frac{\sin x}{x}$ **.**

2) En déduire une primitive de la fonction $f(x)=\dfrac{x\sin x\cos x-\sin^2 x}{x^3}$.

3) Calculer l'intégrale I .

Exercice 4

On se propose de calculer l'intégrale $I=\int_0^{\pi} x\cos x dx$ par deux méthodes :

1) On considère la fonction suivante : $f(x)=x\cos x$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer la dérivée de la fonction $u(x)=x\sin x$.

b) En déduire une primitive de f.

c) Calculer l'intégrale $I=\int_0^{\pi} x\cos x dx$.

2) Calculer l'intégrale $I=\int_0^{\pi} x\cos x dx$ en utilisant une intégration par parties.

3) Comparer les résultats.

Exercice 5

On considère l'intégrale $I=\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^2 x dx$.

1) Donner l'expression linéaire de $\sin^2 x\cos^2 x$.

2) Calculer l'intégrale $I=\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^2 x dx$.

Exercice 6

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $g(x)=\dfrac{-1}{x+1}$.

1) Etudier les variations de f et g et tracer leurs courbes respectives C et C' dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) Calculer l'aire du domaine plan limité par C, C' et les droites d'équations $x = -3$; $x = -2$.

Exercice 7

Pour tout entier naturel n on pose : $U_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$.

1) Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n).

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que : $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

Exercice 8 (Traduit)

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$; $n \geq 0$ 1) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 1$, $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$ 2) Calculer I_0 3) En déduire I_1 et I_2.	نضع $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ حيث $n \geq 0$. 1) باستخدام مكاملة بالتجزئة أثبت أن لكل $n \geq 1$ فإن: $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$ 2) احسب I_0. 3) استنتج I_1 و I_2 .

CHAPITRE 5 : FONCTIONS LOGARITHMES

I. RESUME DE COURS

1. Définition et résultats de base

1) On appelle logarithme népérien, noté ln, la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ s'annulant pour x = 1.

On en déduit alors que pour tout réel strictement positif x, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

2) $\ln(1) = 0$

3) $\ln e = 1$; $e \simeq 2,718...$

4) Le signe de la fonction ln :

$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$	**Le signe de $\ln x$ est le même que celui de $x-1$ pour tout $x > 0$**

5) Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$,on a :

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

6) Equation : $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$

2. Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout entier relatif p :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\qquad \ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ $\qquad \ln(\frac{1}{b}) = -\ln b$

$\ln(a^p) = p\ln a$ $\qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$ $\qquad \ln\left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \ln|a_i|, \quad a_i \neq 0$

3. Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$,	$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$,	$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0^+$,(pour $n \in \mathbb{N}$)
$\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0^-$,	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0^-$,(pour $n \in \mathbb{N}$)
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$,	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

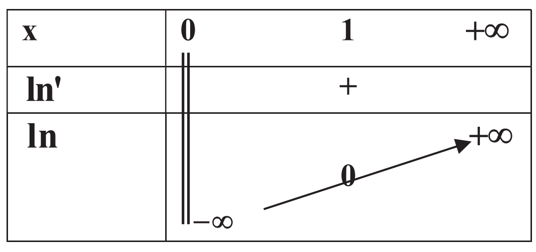
4. Dérivée – primitive

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad\qquad f(x) = \ln|u(x)| \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

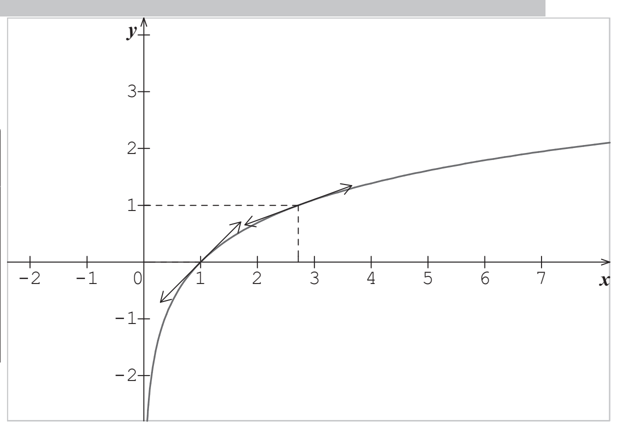
Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur un intervalle I est $\ln|u|$.

5. Courbe

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} > 0$$



x	0	1	$+\infty$
ln'	‖	+	
ln	‖ $-\infty$	0	$+\infty$



Asymptote verticale	$x = 0$
Branche parabolique	Direction (Ox)
Tangente en (1,0)	$y = x - 1$
Tangente en (e,1)	$y = \dfrac{1}{e}x$

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Choisir la bonne réponse :

1	Soit $A = 2\ln 5 + 2\ln(e^{-5}) + \ln\frac{1}{25}$. Alors la valeur de A est	
	Réponse A	0
	Réponse B	$10 + 4\ln 5$
	Réponse C	-10
	Réponse D	$-10 + 4\ln 5$

2	Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ est	
	Réponse A	$]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
	Réponse B	$]1;+\infty[$
	Réponse C	$]0;+\infty[$
	Réponse D	$]-1;1[$

3	L'équation $(x^2 - 9)\ln(x + 2) = 0$	
	Réponse A	admet une unique solution -1
	Réponse B	admet deux solutions
	Réponse C	admet trois solutions
	Réponse D	n'admet pas de solution

4	La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est	
	Réponse A	$x \mapsto -\tan x$
	Réponse B	$x \mapsto \tan x$
	Réponse C	$x \mapsto -\cot x$
	Réponse D	$x \mapsto \cot x$

5	Une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$ est	
	Réponse A	$x \mapsto x(-1+\ln x)$
	Réponse B	$x \mapsto \frac{1}{x}$
	Réponse C	$x \mapsto x + x\ln x$
	Réponse D	$x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$

6	Soit $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$. On a	
	Réponse A	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
	Réponse B	$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$
	Réponse C	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$
	Réponse D	$\lim_{x\to0^+} f(x)=0^+$

QCM 2

Choisir la bonne réponse :

1	Soit $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$. Alors :	
	Réponse A	$I=1$
	Réponse B	$I=\frac{1}{e}$
	Réponse C	$I=\frac{e}{2}$
	Réponse D	$I=\frac{1}{2}$

2	La dérivée de la fonction $f(x)=\sqrt{\ln x}$	
	Réponse A	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$
	Réponse B	$f'(x)=\frac{x}{2\sqrt{\ln x}}$
	Réponse C	$f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$
	Réponse D	$f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

3	Pour tout entier naturel n on pose $U_n=\int_1^e(\ln t)^n dt$. Alors la suite (U_n) est :	
	Réponse A	Croissante
	Réponse B	Décroissante
	Réponse C	non monotone
	Réponse D	Divergente

4	La valeur de l'intégrale $\mathbf{I}=\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx$ est :	
	Réponse A	$\ln(\frac{15}{7})$
	Réponse B	$\ln(\frac{5}{3})$
	Réponse C	$\frac{7}{9}$
	Réponse D	$\ln(\frac{9}{15})$

5	**On pose** $A=\int_0^2 \frac{t^2}{1+t^3}dt$ **. Alors on a :**	
	Réponse A	$A=\ln 3$
	Réponse B	$A=\frac{1}{2}\ln 3$
	Réponse C	$A=\frac{2}{3}\ln 3$
	Réponse D	$A=\frac{1}{3}\ln 3$

6	**Soit** $f(x)=\ln(x+1)$ **avec** $x\in\left]-1,+\infty\right[$ **. On a :**	
	Réponse A	$f^{-1}(x)=e^{x-1}$
	Réponse B	$f^{-1}(x)=e^{x}-1$
	Réponse C	$f^{-1}(x)=e^{x+1}$
	Réponse D	$f^{-1}(x)=e^{x}+1$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(x-3) = \ln(5-x)$

2) $\ln(x-3) + \ln(x+3) = 2\ln 4$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2\ln 2$

2) $\ln(2x^2 - 3x - 5) \leq 2\ln 2$

Exercice 3

Soit $f(x) = (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$.

Calculer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

Exercice 4

Soit $f(x) = \dfrac{3\ln^2 x - 4\ln x + 1}{x - e}$.

Calculer . $\lim\limits_{x \to e} f(x)$

Exercice 5

On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x > -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

2) Calculer $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1.a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Déduire que pour tout entier n ≥ 6, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n

c) Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge.

Exercice 7

La fonction numérique *f* est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 2 + \frac{3\ln x}{x}$

1) Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes dont on donnera des équations.

2) Trouver une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x$.

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$; on a $f(x)>0$.

4) A l'aide d'une utiliser une intégration par parties, calculer l'aire A du domaine plan délimité par la courbe C_f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. Donner une valeur approchée de A à 10^{-3} près.

5.a) Etudier les asymptotes et les branches infinies de C_f.

b) Donner une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.

c) Tracer T et C_f.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-1+\dfrac{1+\ln x}{x}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .Montrer que la droite Δ d'équation $y = x-1$ est asymptote à la courbe (C).

c) Etudier la position relative de (C) et Δ.

2. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x$.

a) Vérifier que $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1+\ln 2}{2}$.

b) Calculer $g'(x)$.

c) Etudier les variations de g et montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$,

$g(x) > 0$.

3.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α □. Vérifier que $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$.

5.a) Préciser les points de la courbe (C) en lesquels la tangente (T) est parallèle à Δ.

b) Représenter la courbe (C) et les droites Δ et (T) dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(m+1)x-1-\ln x=0$.

6) Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. On note U_n l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'asymptote oblique Δ et les droites d'équation respectives $x=n$ et $x=n+1$.

a) Exprimer U_n en fonction de n.

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)-\dfrac{x^2+3}{x^2+1}$.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f et étudier sa parité.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

3) Justifier la dérivabilité de f sur D_f et montrer que pour tout *x* de $]0;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x^2+1)^2}$$

4) Dresser le tableau de variation de f.

5.a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution α et vérifier que $0,2<\alpha<0,3$.

b) Que peut-on déduire pour l'intervalle $]-\infty;0[$?

c) Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ sur D_f

6) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) L'équation $\ln(x-3) = \ln(5-x)$

Conditions d'existence : $x-3>0$ **et** $5-x>0$.

C'est-à-dire : $x>3$ **et** $x<5$. **D'où le domaine de définition de l'équation est** $D =]3\,;\,5[$.

Résolution de l'équation : Pour tout $x \in D$, $\ln(x-3) = \ln(5-x)$ **équivaut à** $x-3 = 5-x$ **c'est-à-dire** $2x = 8$ **soit** $x = 4$.

Validation des solutions: Cette solution nombre appartient bien à D. Donc l'ensemble des solutions est $S = \{4\}$.

2) L'équation $\ln(x-3) + \ln(x+3) = \ln 7$

Conditions d'existence : L'ensemble de définition D de l'équation est l'ensemble des réels x tels que $\begin{cases} x-3>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ **soit** $D =]3;+\infty[$.

Résolution de l'équation : Pour tout $x \in]3;+\infty[$ **on a :**

$$\ln(x-3) + \ln(x+3) = 2\ln 4 \Leftrightarrow \ln\big((x-3)(x+3)\big) = \ln 16$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5$$

Validation des solutions: La solution $x=-5$ est rejetée car $-5 \notin D$. Alors l'ensemble de solutions est $S=\{5\}$.

Corrigé 2

1) L'inéquation $\ln(2x-5)+\ \ln(x+1)\le 2\ln 2$

Conditions d'existence : L'ensemble de définition D de l'inéquation est l'ensemble des réels x tels que $\begin{cases}2x-5>0\\ x+1>0\end{cases}$ soit $D = \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$.

Résolution de l'inéquation : Pour tout $x \in \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ on a :

$$\begin{aligned}\ln(2x-5)+\ln(x+1) &= \ln\left((2x-5)(x+1)\right)\\ &= \ln(2x^2-3x-5)\end{aligned}$$

L'inéquation s'écrit donc $\ln(2x^2-3x-5)\le \ln 4$

La fonction ln étant strictement croissante, donc l'inéquation équivaut à $2x^2-3x-5\le 4$ Soit $2x^2-3x-9\le 0$.

Le trinôme $2x^2-3x-9$ admet dans $\mathbb{R}$ deux racines : $-\frac{2}{3}$ et 3 et il est négatif lorsque x est compris entre ces racines. C'est-à-dire $-\frac{2}{3}\le x\le 3$.

Validation des solutions: Comme l'ensemble de définition de l'inéquation est $D = \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$, et $-\frac{2}{3}\le x\le 3$; on déduit que l'ensemble de solutions est l'ensemble des réels x tels que $\frac{5}{2}<x\le 3$ soit $S=\left]\frac{5}{2};3\right]$.

2) L'inéquation $\ln(2x^2-3x-5)\le 2\ln 2$

<u>Conditions d'existence</u> : L'ensemble de définition D de l'inéquation est l'ensemble des réels x tels que $2x^2 - 3x - 5 > 0$.

Le trinôme $2x^2 - 3x - 5$ admet deux racines : -1 et $\frac{5}{2}$ et il est positif lorsque x est extérieur à l'intervalle de ces racines. C'est-à-dire que l'ensemble de définition D de l'inéquation est $D =]-\infty;-1[\cup]\frac{5}{2};+\infty[$.

<u>Résolution de l'inéquation</u> : Pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]\frac{5}{2};+\infty[$, l'inéquation équivaut à $2x^2 - 3x - 5 \leq 4$ car la fonction ln est strictement croissante.

Soit $2x^2 - 3x - 9 \leq 0$.

Le trinôme $2x^2 - 3x - 9$ admet dans $\mathbb{R}$ deux racines : $-\frac{2}{3}$ et 3 et il est négatif lorsque x est compris entre ces racines. C'est-à-dire $x \in \left[-\frac{2}{3};3\right]$.

<u>Validation des solutions</u>: En tenant compte de l'ensemble de définition de l'inéquation, on déduit que l'ensemble de solutions S de l'inéquation est l'ensemble des réels x tels que

$$\begin{cases} x \in]-\infty;-1[\cup]\frac{5}{2};+\infty[\\ x \in \left[-\frac{2}{3};3\right] \end{cases}$$

Par suite $S = \left[-\frac{3}{2};-1\right[\cup \left]\frac{5}{2};3\right]$.

Corrigé 3

$f(x) = (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$

Une forme d'indétermination se présente lorsque $x \to 2^+$. Pour lever cette indétermination on modifie l'écriture de $f(x)$ pour faire apparaître des limites usuelles.

$f(x) = (x-2)(x-2)\ln(x-2)(x^2+2x+4)$

$$f(x) = \frac{(x-2)}{(x^2+2x+4)} \times (x-2)(x^2+2x+4)\ln(x-2)(x^2+2x+4)$$

D'une part on a : $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)}{(x^2+2x+4)} = 0^+$.

D'autre part, en posant $t = (x-2)(x^2+2x+4)$ **on a** $(x \to 2^+) \Leftrightarrow (t \to 0^+)$.

Donc $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)(x^2+2x+4)\ln(x-2)(x^2+2x+4) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0^-$

Par suite $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)}{(x^2+2x+4)} \times \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t$. **Enfin :** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0^-$.

Corrigé 4

$$f(x) = \frac{3\ln^2 x - 4\ln x + 1}{x - e}$$

Pour lever l'indétermination lorsque $x \to e$, on peut appliquer un taux d'accroissement :

On pose $u(x) = 3\ln^2 x - 4\ln x + 1$. **Donc** $u(e) = 3\ln^2 e - 4\ln e + 1 = 0$ **et par conséquent,** $f(x) = \dfrac{u(x) - u(e)}{x - e}$. **Donc** $\lim\limits_{x\to e} f(x) = \lim\limits_{x\to e} \dfrac{u(x) - u(e)}{x - e}$

La fonction u est dérivable en $x_0 = e$ et de dérivée $u'(x) = \frac{6}{x}\ln x - \frac{4}{x}$.

$$\lim_{x\to e}\frac{u(x)-u(e)}{x-e} = u'(e) \Leftrightarrow \lim_{x\to e} f(x) = u'(e).$$

On a : $u'(e) = \frac{6}{e}\ln e - \frac{4}{e} = \frac{2}{e}$. Par suite $\lim_{x\to e} f(x) = -\frac{1}{e}$

Corrigé 5

1) On peut écrire pour tout $x > -1$: $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1}$

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Donc $a = 1, b = -1$ et $c = 1$

2) On a alors $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx \Leftrightarrow J = \int_0^1\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$J = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right]_0^1$$

$$J = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

3) Pour calculer $I = \int_0^1 x\ln(1+x)dx$ en utilisant une intégration par parties on pose :

$$\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(1+x) \end{cases} ; \text{ Alors } \begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$$

Donc $\int_0^1 x\ln(1+x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{1+x}dx$

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$$

$$I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}J$$

$$I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)$$

$$I = \frac{1}{4}.$$

Corrigé 6

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1.a) Tableau de variation de f.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}\right) = 0^+ \quad \text{car} \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0^+$$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ car quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

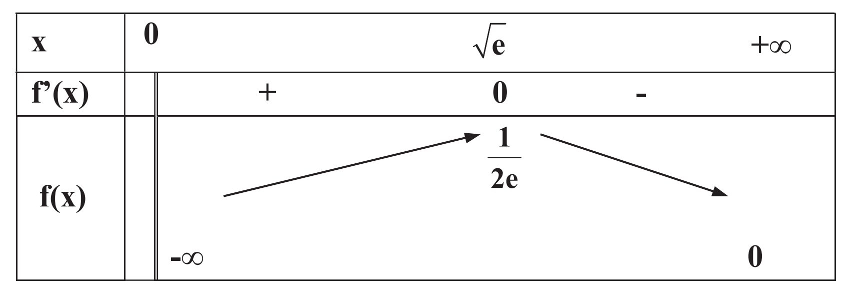
$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \ f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln x}{\left(x^2\right)^2}$$

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Or $x^3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur :

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}$$

On a $f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$.



x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

b) Montrons que pour tout entier n ≥ 6, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1, \sqrt{e}\right]$ une seule solution notée a_n :

- **La restriction de f sur l'intervalle $I = \left[1, \sqrt{e}\right]$ est continue et strictement croissante et $f(I) = J = \left[0, \frac{1}{2e}\right]$.**

- **De plus $\forall n \geq 6, \ 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6} < \frac{1}{2e}$; $\left(\left(\frac{1}{6} \simeq 0{,}167 < \frac{1}{2e} \simeq 0{,}184\right)\right.$. Alors**

$\forall n \geq 6, \frac{1}{n} \in J = \left[0, \frac{1}{2e}\right]$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1,\sqrt{e}\right]$ une seule solution notée a_n

c- Montrons que la suite (a_n) est décroissante, et qu'elle converge :

On a $\forall n \geq 6,\ \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Or $\forall n \geq 6,\ \frac{1}{n} = f(a_n)$ et $\frac{1}{n+1} = f(a_{n+1})$ donc

$f(a_n) > f(a_{n+1})$ et comme f est strictement croissante sur $\left[1,\sqrt{e}\right]$ alors

$a_n > a_{n+1}$ et la suite (a_n) est strictement décroissante.

D'autre part $a_n \in \left[1,\sqrt{e}\right]$ donc la suite (a_n) est décroissante et minorée par 1, d'où elle converge.

Corrigé 7

1) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-2)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x} = 0$. On Alors la droite d'équation $y = 2x - 2$ droite est une asymptote oblique à C_f.

D'autre part on a $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-2) = -2$ et $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3}{x} = +\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3\ln x}{x} = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à C_f.

2) Une primitive de la fonction $x \mapsto 2x-2$ sur $\left]0;+\infty\right[$ est $x \mapsto x^2 - 2x$,

La fonction $x \mapsto \frac{3\ln x}{x}$ s'écrit sous la forme $x \mapsto 3 \times \frac{1}{x} \times \ln x$

On en déduit que la fonction $x \mapsto 3 \times \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $x \mapsto \frac{3\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

Conclusion : La fonction $x \mapsto x^2 - 2x + \frac{3}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Corrigé 8

1) Calcul de limites

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(2x\sqrt{x}) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(-3\ln x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Pour lever l'indétermination en $+\infty$ on factorise par x :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x(2\sqrt{x} - 3\frac{\ln x}{x})\right)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(2\sqrt{x}) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-3\frac{\ln x}{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x} - 3\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x} - 3\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) Calculons la dérivée :

$$f'(x) = 2\sqrt{x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{4x + 2x}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x}$$

$$f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} \quad \text{soit } f'(x) = 3\frac{x^2 - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur car $x \in]0;+\infty[$.

On a alors $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{x} \geq 0$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{x}$$

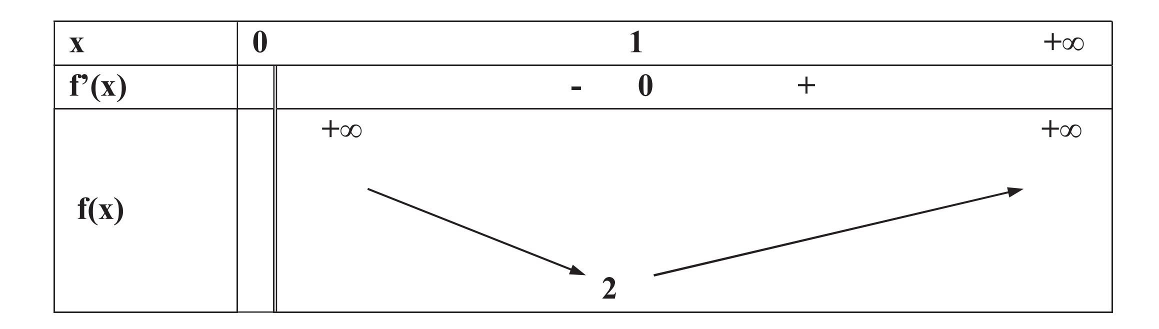
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^4 \geq x$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - x \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

On a $f(1) = 2$



x	0		1		$+\infty$
f'(x)	||	-	0	+	
f(x)	||	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

3) La fonction f présente un minimum absolu en 1 qui vaut $f(1)=2$ supérieur à zéro. Donc pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$; on a $f(x)>0$.

4) La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[1;e]$. Donc l'aire cherchée est calculée par l'intégrale $A=\int_1^e f(x)dx$.

Donc $A=\int_1^e(2x\sqrt{x}-3\ln x)dx$.

$$A=2\int_1^e x\sqrt{x}dx-3\int_1^e \ln x dx$$

$$A=2\int_1^e x^{\frac{3}{2}}dx-3\int_1^e \ln x dx$$

La première intégrale est calculée directement par les formules des primitives usuelles :

$$2\int_1^e x^{\frac{3}{2}}dx=2\left[\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right]_1^e$$

$$2\int_1^e x^{\frac{3}{2}}dx=\left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^e$$

$$2\int_1^e x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}(e^{\frac{5}{2}}-1)$$

La deuxième intégrale $3\int_1^e \ln x dx$ est calculée en utilisant une intégration par parties :

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ **, ce qui donne** $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$ **.**

Par suite $3\int_1^e \ln x dx = 3\left(\left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx\right)$

$$3\int_1^e \ln x dx = 3\left(\left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e dx\right)$$

$$3\int_1^e \ln x dx = 3\left(\left[x \ln x\right]_1^e - \left[x\right]_1^e\right)$$

$$3\int_1^e \ln x dx = 3\left[x \ln x - x\right]_1^e$$

$$3\int_1^e \ln x dx = 3\left[e \ln e - e - 1 \ln 1 + 1\right]_1^e$$

$$3\int_1^e \ln x dx = 3$$

Il vient $A = \frac{4}{5}(e^{\frac{5}{2}} - 1) - 3$

$$A = \frac{4}{5}e^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{5} - 3$$

$$A = \frac{4}{5}e^{\frac{5}{2}} - \frac{19}{5}$$

Soit $A = \dfrac{4e^{\frac{5}{2}} - 19}{5}$

Enfin $A \simeq 5{,}946$ **ua**

5.a) On a trouvé $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Donc admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

En plus $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Calculons $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(2\sqrt{x} - 3\frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \times \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} - 3 \times \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

On sait que $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Par suite $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

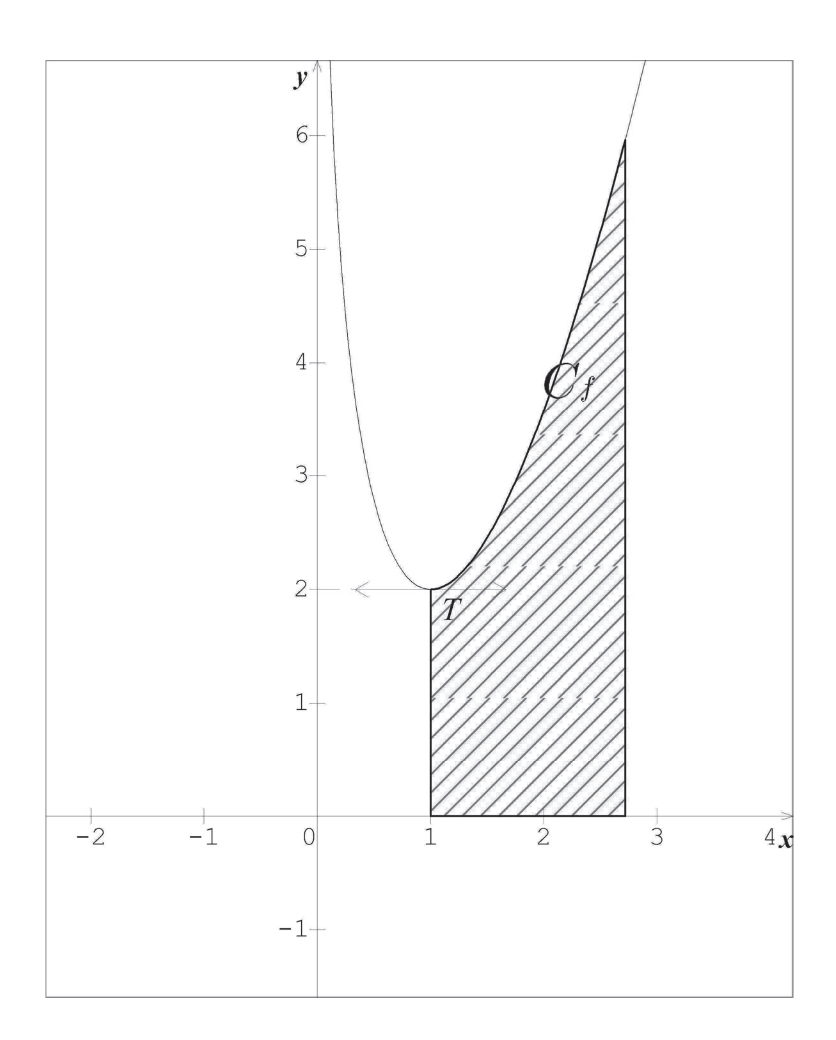
On en déduit que la courbe C_f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

b) Une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Soit $y = 2$ car $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$;

(Une tangente horizontale).

c) Courbe de f :



Corrigé 9

La fonction f est définie sur]0;+∞[par : $f(x) = x - 1 + \frac{1 + \ln x}{x}$ **.**

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonomal direct d'unité graphique 1cm.

1.a) Limite et interprétation :

*** On peut écrire :** $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}(1 + \ln x)$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (1+\ln x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Interprétation graphique :

la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$, (l'axe des ordonnées).

b) On peut écrire : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x) - (x-1)) = \lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}) = 0$

Alors la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe (C).

c) Pour étudier la position relative de (C) et Δ, on étudie le signe de $d(x) = f(x) - (x-1)$

$d(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

Le signe de $d(x)$ alors est celui de $1+\ln x$, car x est de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On a $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

La droite Δ coupe (C) au point de coordonnées $(e^{-1}, e^{-1} - 1)$.

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$1+\ln x$	‖ -	0	+
Position relative de (C) et Δ	‖ $\Delta/(C)$		$(C)/\Delta$

2) La fonction g est définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-\ln x$.

a) On a :

$$g(\frac{1}{\sqrt{2}})=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}+\ln(2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$$

Donc $g(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1+\ln 2}{2}$

b) Calcul de $g'(x)$:

$$g(x)=x^2-\ln x \Rightarrow g'(x)=2x-\frac{1}{x}$$

$$g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$$

c) On constate que le signe de $g'(x)$ est celui de $2x^2-1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

On a pour tout x de $]0,+\infty[$: $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

D'après 2.a) on a : $g(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1+\ln 2}{2}$.

Dressons une partie du tableau de variation de g :

x	0			$\frac{1}{\sqrt{2}}$			$+\infty$
g'(x)	‖		$-$	0	$+$		
g(x)	‖		↘	$\frac{1+\ln 2}{2}$	↗		

La fonction g présente un minimum absolu $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1+\ln 2}{2}$ **sur** $]0;+\infty[$ **.**

Comme $\frac{1+\ln 2}{2} \approx 0,85 > 0$ **,** $g(x) > 0$ **pour tout x de** $]0,+\infty[$ **.**

3.a) On a $f(x) = x - 1 + \frac{1+\ln x}{x}$

Donc $f'(x) = 1 + \frac{1-(1+\ln x)}{x^2}$

Soit $f'(x) = \frac{x^2 - \ln x}{x^2}$

On a alors pour tout x de $]0,+\infty[$ **:** $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ **.**

b) Tableau de variation de f :

Le signe de $f'(x)$ **est celui de** $g(x)$

Donc pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$, $f'(x)>0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

4.a) D'après l'étude de f et son tableau de variations on a :

- **f est continue sur $\left]0;+\infty\right[$;**
- **f est strictement croissante (monotone) sur $\left]0;+\infty\right[$;**
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Donc $f:]0;+\infty[\longrightarrow J=]-\infty;+\infty[$ réalise une bijection.

b) La fonction f est continue et bijective sur son domaine de définition avec $0\in J=]-\infty;+\infty[$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\left]0,+\infty\right[$.

De plus, on a :

$$\begin{cases} f(\frac{1}{e})\approx -0,63<0 \\ f(\frac{1}{2})\approx +0,11>0 \end{cases};$$

Donc α vérifie $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$.

5.a) Pour préciser les points de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à l'asymptote Δ d'équation $y = x - 1$, on résout l'équation $f'(x) = 1$

Donc : $$\frac{x^2 - \ln x}{x^2} = 1$$

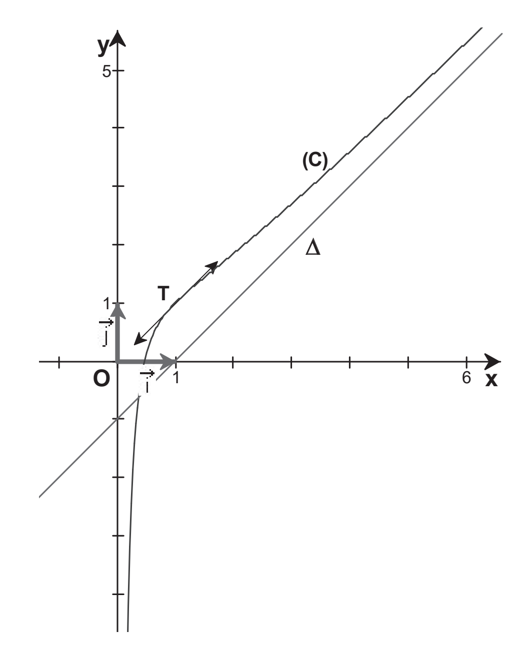
$$x^2 - \ln x = x^2$$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

Alors la tangente (T) à la courbe (C) au point $(1,1)$ est parallèle à la droite Δ . Une équation de cette tangente est : $y = x$

b) Représentation de la courbe (C)



c) L'équation $(m+1)x-1-\ln x=0$ s'écrit $mx+x-1-\ln x=0$ donc

$$m=-1+\frac{1+\ln x}{x}$$

$$x+m=x-1+\frac{1+\ln x}{x}$$

$$x+m=f(x)$$

$$\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$$

Les solutions du système sont les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et les droites Δ_m d'équation $y=x+m$ parallèles à l'asymptotes oblique de (C) et à la tangente (T), où m est un paramètre réel.

A noter que :

Δ_{-1} est l'asymptotes oblique Δ à (C)

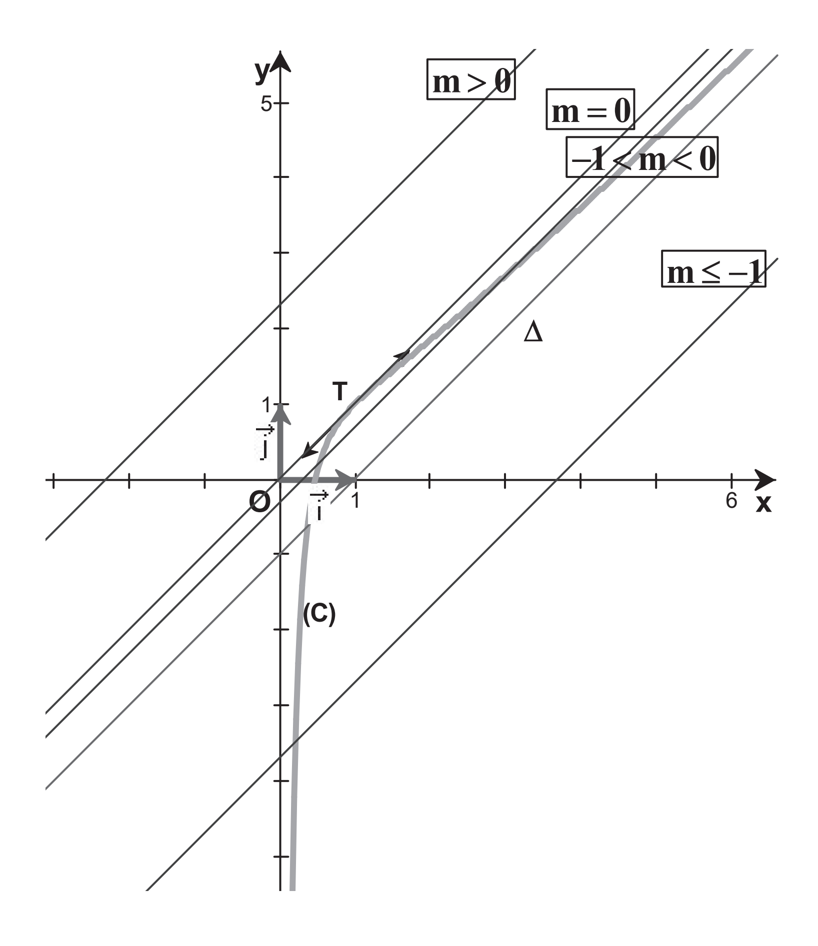
Δ_0 est la tangente (T) à (C) parallèle à Δ

Alors, le nombre de solutions de l'équation $(m+1)x-1-\ln x=0$ est le même nombre de points d'intersection de (C) et Δ_m

Les solutions de l'équation $(m+1)x-1-\ln x=0$ sont les abscisses des points d'intersection de (C) et Δ_m

D'après la représentation graphique de f, on déduit le tableau suivant :

valeurs du paramètre m	nombre d'intersection de (C) et Δ_m	nombre de solutions
$m \leq -1$	1	1
$-1 < m < 0$	2	2
$m = 0$	1 (tangente)	1
$m > 0$	0	0



6.a) La fonction f est continue sur tout intervalle de type $[n, n+1]$ où n est un entier naturel, $n \geq 1$.

La courbe (C), est située en dessus de l'asymptote oblique Δ sur l'intervalle $[n, n+1]$.

Alors l'aire U_n du domaine plan délimité par la courbe (C), l'asymptote oblique Δ et les droites d'équation respectives $x = n$ et $x = n+1$ est calculée par :

$$U_n = \int_n^{n+1} (f(x) - (x-1))dx \times ua$$

Alors :

$$U_n = \int_n^{n+1} \frac{1+\ln x}{x} dx \times ua$$

$$U_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}(1+\ln x)dx \times ua$$

$$U_n = \left[\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\right]_n^{n+1} ua$$

$$U_n = \frac{1}{2}(1+\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(1+\ln(n))^2 ua$$

$$U_n = \frac{1}{2}\left((1+\ln(n+1))^2 - (1+\ln(n))^2\right)ua$$

$$U_n = \frac{1}{2}\left((\ln(n+1) - \ln n)(2+\ln(n+1)+\ln n\right)ua$$

$$U_n = \frac{1}{2}\left((\ln(\frac{n+1}{n}))(2+\ln(n^2+n)\right)$$

$$U_n = \frac{1}{2}\left(\ln(1+\frac{1}{n})\right)\left((2+\ln(n^2+n)\right)$$

b) Pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$, on procède à une transformation d'écriture pour lever l'indétermination :

$$U_n = \frac{1}{2}\left(\ln(1+\frac{1}{n})\right)\left((2+\ln(n^2+n)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{(2+\ln(n^2+n)}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{2}{n}+\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(n+1)}{n}\right)$$

On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{n}+\dfrac{\ln n}{n}+\dfrac{\ln(n+1)}{n}\right) = 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

<u>Interprétation graphique :</u>

Lorsque n tend vers plus l'infini, l'asymptote oblique Δ coïncide avec la courbe (C). Donc il n y a plus d'espace entre les frontières verticale du domaine d'aire U_n , d'où U_n tend vers zéro .

Corrigé 10

1) Domaine de définition

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x^2} > 0 \\ x^2+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$$

Alors $D_f = \mathbb{R}^*$

Parité :

On a $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ **car** $D_f = \mathbb{R}^*$ **et** $f(-x) = \ln\left(\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2}\right) - \dfrac{(-x)^2+3}{(-x)^2+1}$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \frac{x^2+3}{x^2+1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire.

2) Calcul de limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{x^2+3}{x^2+1} = 3 \text{ d'où } \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x^2+1} = 1 \text{ d'où } \lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$$

Interprétation graphique :

La courbe C_f admet une asymptote verticale d'équaion $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équaion $y = -1$.

3) La fonction $x \mapsto -\dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ est rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^*$.

Il en est de même pour la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2}$. Cette dernière est strictement positive sur D_f, donc la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)$ est dérivable sur D_f comme composée de fonctions dérivables.

Enfin la fonction f est dérivable sur D_f comme somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x\times x^2 - 2x(x^2+1)}{x^4}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} - \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-2x}{x^4}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x(x^2+1)} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2+1) + 4x^2}{x(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x^2+1)^2}.$$

4) Le signe de $f'(x)$ est celui de $\frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$x-1$	-		-		-	0	+
$x+1$	-	0	+		+		+
x	-		-	0	+		+
$f'(x)$	-		+	||	-		+

Comme f est une fonction paire, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

On déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	||	-	0	+	
$f(x)$	-1	↘	$-2+\ln 2$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$-2+\ln 2$	↗	-1

4.a) Sur l'intervalle $]0;1]$; la fonction f est continue et change de signe une seule fois. Alors l'équation $f(x)=0$ admet dans cet intervalle une unique solution. Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, f est strictement négative. On conclut que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution α.

On a $f(0,2) \simeq +0,34$ et $f(0,3) \simeq -0,34$ donc $f(0,2) \times f(0,3) < 0$. Ce qui démontre que $0,2 < \alpha < 0,3$, (D'après le théorème des valeurs intermédiaires).

b)Comme la fonction f est paire, on déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-\infty;0[$ une unique solution $\beta = -\alpha$. Par conséquence $-0,3 < \beta < -0,2$.

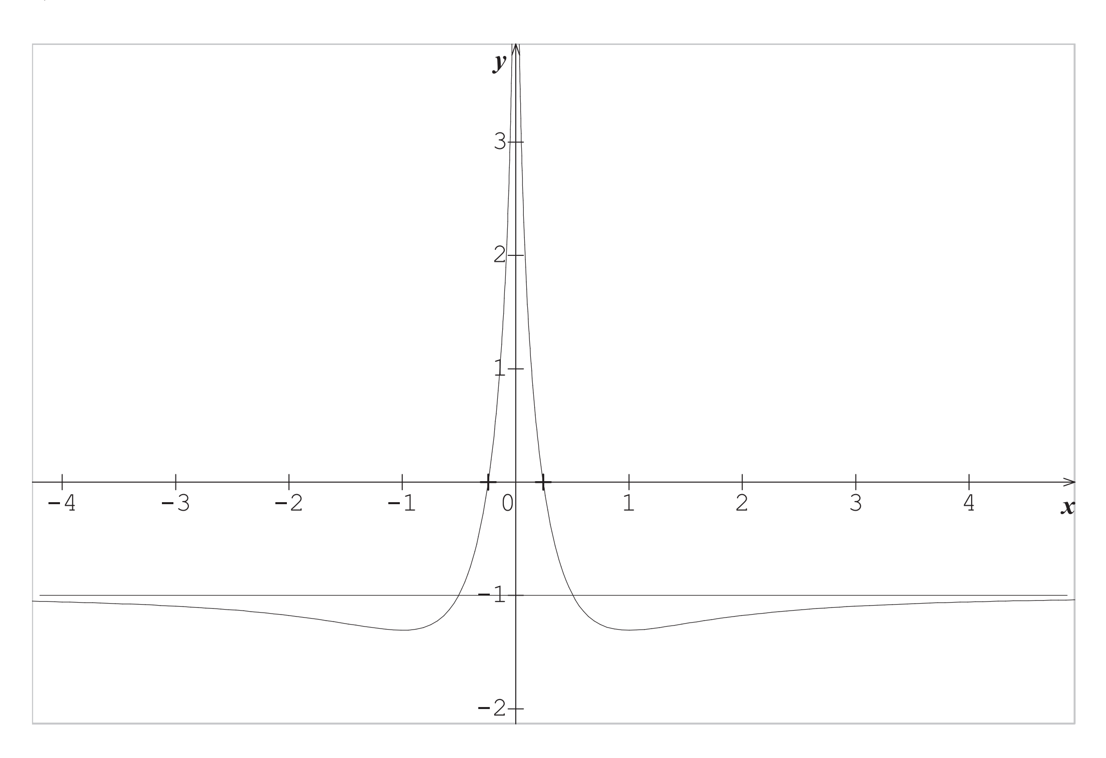
c) On en déduit le signe de f(x) :

Pour $x \in]-\infty;-\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ on a $f(x) < 0$.

Pour $x \in]-\alpha,0[\cup]0;\alpha[$ on a $f(x) > 0$

Et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\alpha$.

6) Courbe de f :



V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

1. Soit *g* la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels *a*, *b* et *c* tels que l'on ait, pour tout $x>1$:
$g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$.

Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer avec une intégration par parties: $I=\int_2^3\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx$. On donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$ avec p et q rationnels.

Exercice 2

Pour tout entier naturel $p\geq 1$, on pose $I_p=\int_1^e x^2(\ln x)^p\,dx$.

1) Calculer I_1 en utilisant une intégration par parties.

2) Montrer que: $\forall p\geq 1,\quad I_{p+1}=\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{p+1}{3}I_p$. En déduire I_2, I_3

3) Montrer que la suite (I_p) est décroissante et convergente, (On ne demande pas de calculer la limite.)

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Démontrer chacun des résultats suivants et en donner des interprétations géométriques.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x-3)\right) = 0$.

2.a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$.

b) Vérifier que : $\begin{cases} \forall x \geq 1; \quad f'(x) \geq 0 \\ \forall x \leq 1; \quad f'(x) \leq 0 \end{cases}$.

c) Dresser le tableau de variations de f .

3.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ exactement deux solutions α et β. Vérifier que : $0,37 < \alpha < 0,38$ et $3,36 < \beta < 3,37$.

b) Déterminer les points de (C) en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$ et donner les équations des tangentes en ces points.

c) Construire la courbe (C).

d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\ln x = mx$ où m est un paramètre réel.

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $D =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 + x).$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité $2cm$.

1.a) Calculer les limites suivantes: $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ puis les interpréter géométriquement.

b) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement.

2.a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f et étudier son signe sur D.

b) Dresser le tableau de variations de f.

3. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C).

4. Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses puis construire (C).

5.a) En utilisant une intégration par parties, calculer les deux nombres: $I = \int_1^e \ln x dx$ et $J = \int_1^e \ln(x+1)dx$.

b) Calculer l'aire, en cm^2, de la surface plane délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respective $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 5

On considère la fonction numérique g définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(x) = 2x + \ln(x+1)$.

1.a) Calculer les limites suivantes: $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 2x)$. Interpréter graphiquement.

2. Calculer $g'(x)$ où g' est la fonction dérivée de g. Dresser le tableau de variation de g.

3.a) Calculer $g(0)$, en déduire le signe de $g(x)$.

b) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

4. Pour tout $x > -1$; on pose $u(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

a) Calculer $u'(x)$ et montrer que pour tout $x > -1$ on a $g(x) = u'(x) + 2x - 1$.

b) En déduire la primitive G de la fonction g sur $]-1;+\infty[$ qui vérifie $G(0) = -1$.

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 6

Partie A

On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$g(x) = x^3 - 3 + 2\ln x$

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ **et dresser le tableau de variation de g.**

2. a) Montrer que g **réalise une bijection de** $]0\,;+\infty[$ **sur un intervalle** J **que l'on déterminera.**

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ **admet une unique solution** α**. Vérifier que** $1,3 \leq \alpha \leq 1,4$

c) En déduire le signe de la fonction *g* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ **par :**

$f(x) = x - 2 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

On note Γ **la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan, muni d'un repère** $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ **orthonormé.**

1.a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (x-2)\big) = 0$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

c) Étudier le signe de $d(x) = f(x) - (x-2)$ **, résumer dans un tableau et interpréter graphiquement.**

2.a) Calculer $f'(x)$ **et justifier que** $f'(x)$ **a même signe que** $g(x)$.

b) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha^3 - 4\alpha^2 - 1}{2\alpha^2}$ **et donner une valeur approchée de** $f(\alpha)$ **à** 10^{-1} **près.**

c) En déduire le tableau de variation de la fonction *f*.

3.a) Donner l'équation de la tangente T à Γ au point A d'abscisse $x_0 = 1$.

b) Montrer que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un deuxième point autre que A d'abscisse β telle que $1{,}9 \leq \beta \leq 2$

c) Tracer l'allure de la courbe Γ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$**.**

4) Soit *n* un entier naturel $n \geq 3$ **. On considère l'aire du domaine E du plan compris entre la courbe Γ et les droites d'équations respectives $y = x - 2$,** $x = 3$ **et** $x = n$ **.**

a) Justifier que cette aire, exprimée en cm², est donnée par :

$I_n = \int_3^n \frac{-1+\ln x}{x^2}\,dx$ **.**

b) Calculer $J_n = \int_3^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **à l'aide d'une intégration par parties. En déduire I_n en fonction de n .**

c) Calculer la limite de l'aire I_n du domaine E quand n tend vers $+\infty$ **.**

Exercice 7

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $I =]-1;+\infty[$ par:

$$\mathbf{g(x) = (x+1)^2 - 1 + \ln(x+1).}$$

1) Calculer $g'(x)$; en déduire le sens de variation de g .

2) Calculer g(0); en déduire le signe de g(x) sur I. (la représentation de g n'est pas demandée).

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $I =]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} .$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$; puis interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$; en déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) dont-on donnera une équation.

b) Démontrer que (C) rencontre (D) en un seul point A dont-on précisera les coordonnées puis étudier la position relative de (C) et (D).

3. a) Calculer $f'(x)$ puis vérifier que pour tout x de I on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2} .$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point B d'abscisse $x_0 = e - 1$.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que : $-0,6 < \alpha < -0,5$ et $1,3 < \beta < 1,4$.

On donne : $\ln(0,4) \approx -0,9$; $\ln(0,5) \approx -0,7$; $\ln(2,3) \approx 0,8$ et $\ln(2,4) \approx 0,9$.

5. Construire, dans repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les deux asymptotes; la tangente (T) et la courbe (C).

6. Soit m un paramètre réel strictement positif.

a) Calculer, en cm^2, l'aire A(m) du domaine plan limité par la courbe (C); l'asymptote (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = m$.

b) Pour quelle valeur de m a-t-on $A(m)=2cm^2$? Hachurer cette aire sur la figure.

7. On désigne par h la restriction de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1} (où h^{-1} est la bijection réciproque de h).

c) Tracer la droite d'équation y = x et la courbe (C') représentative de h^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x\ln x - x - 1;\ x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

(C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j})$.
1) a) Etudier la continuité de f à droite de 0.
b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 .interpréter graphiquement.
2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
b) Montrer que la courbe (C) de f admet au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$ une tangente horizontale.
c) Dresser le tableau de variation de f.
3)a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution α et que $2 < \alpha < 2.1$.

b) Tracer la courbe (C).

4) On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2 \ln x$.

a) Vérifier que pour tout $x > 0$, g'(x)= f(x) +2x+1.

b) En déduire la primitive F de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ telle que F(1)=0.

5) Pour tout $n \geq 1$. On pose : $U_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$.

a) InterpréterU_n graphiquement.

b) Démontrer que la suite (U_n) est croissante.

c) Exprimer U_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 3x - 3 - 2x\ln x,\ x > 0 \\ f(0) = -3 \end{cases}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm .

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire que f est continue à droite de $x_0 = 0$.

b) Montrer queet interpréter graphiquement. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$

c) Montrer que. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2.a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$ et vérifier que $f'(\sqrt{e}) = 0$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse $x_0 = 1$

b) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses (Ox) en un point B autre que A dont l'abscisse α est telle que : $2.3 \leq \alpha \leq 2.4$.

c) Déduire de ce qui précède le signe de f(x) sur $[0;+\infty[$.

4) On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2\ln x\ ;\ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = 3x - 3 + g'(x)$.

b) En déduire une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

5) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose: $U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$.

a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) Exprimer U_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 10 (Traduit)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}$.	**نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي:** $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}$
Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonomal direct d'unité graphique 5cm	**وليكن (C) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ وحدته 5cm**
1. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et que $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$ puis interpréter graphiquement ces résultats	**1) أثبت أن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ؛ وأن $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$ ثم فسر النتائج بيانيا.**
2. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f.	**2) احسب $f'(x)$ واستنتج تغيرات f.**
3. Dresser le tableau des variations de f.	**3) ارسم جدول تغيرات f .**
4. Trouver une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse $x_0=1$.	**4) أوجد معادلة المماس T للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.**
5.a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera.	**5.a) بين أن الدالة f تقابل من $]0;+\infty[$ نحو مجال يطلب تحديده.**
b) Calculer $(f^{-1})'\left(\frac{-1+\ln 4}{2}\right)$; on pourra utiliser la question 4.	**b) احسب $(f^{-1})'\left(\frac{-1+\ln 4}{2}\right)$ ؛ لذلك يمكن استخدام السؤال 4.**
c) Construire (C).	**c) أنشئ المنحنى (C).**

CHAPITRE 6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES

I. RESUME DE COURS

1. Définition et propriétés

La bijection réciproque de la fonction logarithme népérien est appelée fonction exponentielle de base e .

$$\left| \begin{array}{l} f :]0;+\infty[\to]-\infty;+\infty[\\ \quad x \mapsto \ln x \end{array} \right\rangle \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f^{-1} :]-\infty;+\infty[\to]0;+\infty[\\ \quad x \mapsto e^x \end{array} \right\rangle$$

Propriétés

Pour tous réels x et y on a :

$y > 0; \quad e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$ $e^x > 0$ $\ln e^x = x$ $x > 0 \Rightarrow e^{\ln x} = x$ $e^0 = 1 ;\ e^1 = e$.	$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$ $0 < e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$
$e^x \times e^y = e^{x+y}$, $\qquad \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	$\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$, $\qquad \left(e^x\right)^y = e^{xy}$

2. Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$, $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$,

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ,$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ **(pour** $n \in \mathbb{N}^*$ **.)**

3. Dérivées et primitives

$\left| \begin{array}{l} \text{u est une fonction dériable sur I} \\ f(x) = e^{u(x)} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{f est dériable sur I} \\ f'(x) = u'(x)e^{u(x)} \end{array}}$

$\left| \begin{array}{l} \text{u est une fonction dériable sur I} \\ f(x) = u'(x)e^{u(x)} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} F(x) = e^{u(x)} \text{ est une} \\ \text{primitive de f sur I} \end{array}}$

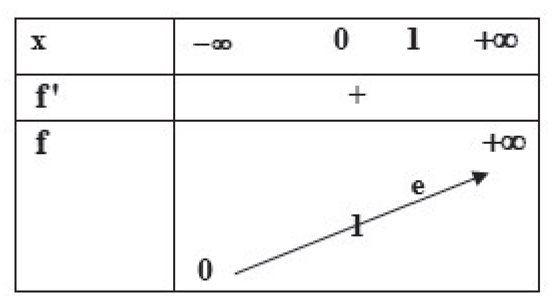
Cas particuliers :

$f(x) = e^{x} \Rightarrow f'(x) = e^{x}$	$f(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$

4. Variations et représentation graphique

Soit $f(x) = e^{x}$. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée strictement positive : $f'(x) = e^{x}$.

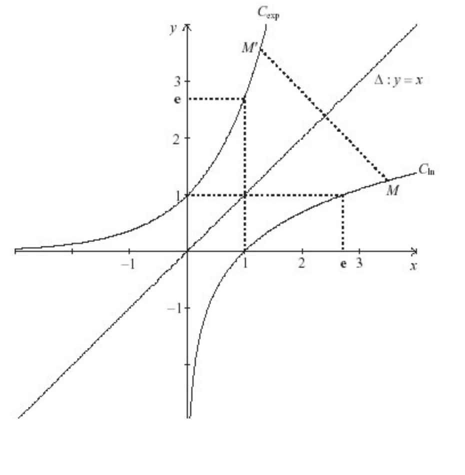
La fonction exponentielle f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
f'	+
f	0 ↗ 1 ↗ e ↗ $+\infty$

La représentation graphique de la fonction exponentielle de base e est symétrique de celle de la fonction logarithme népérien par rapport à

la droite d'équation $y = x$.



Asymptote horizontale	$y = 0$
Branche parabolique	**Direction (Oy)**
Tangente en (0,1)	$y = x + 1$
Tangente en (1,e)	$y = ex$

5. Croissances comparées de x^{α}, e^{x} et $\ln x$

Pour tous réels α et β strictement positifs:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^{+}} x^{\alpha}(\ln x)^{\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n}e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(a^{x})^{\beta}}{x^{\alpha}} = +\infty$$ **(pour tout réel a > 1).**

Au voisinage de plus l'infini, les puissances d'exposant positif l'emportent sur le logarithme; et l'exponentielle l'emporte sur les puissances à exposant strictement positif.

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Choisir la bonne réponse :

1	Soit $f(x)=(e^{-2x})^3\times(e^{-3x})^{-2}$. Alors	
	Réponse A	$f(x)=e^{-12x}$
	Réponse B	$f(x)=e^{12x}$
	Réponse C	0
	Réponse D	1

2	Le domaine de définition de la fonction $f(x)=\dfrac{e^{3x+1}}{(e^x)^2-1}$ est	
	Réponse A	$]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
	Réponse B	$]1;+\infty[$
	Réponse C	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
	Réponse D	$]-\infty;+\infty[$

3	L'équation $(e^x+1)(e^{2x}-5e^x-6)=0$ ….	
	Réponse A	admet une unique solution
	Réponse B	admet deux solutions
	Réponse C	admet trois solutions
	Réponse D	n'admet pas de solution

4	La dérivée de la fonction $x \mapsto e^{\sin x}$ est	
	Réponse A	$x \mapsto e^{\cos x}$
	Réponse B	$x \mapsto \cos x \times e^{\sin x}$
	Réponse C	$x \mapsto -\cos x \times e^{\sin x}$
	Réponse D	$x \mapsto -e^{\cos x}$

5	Soit $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Alors on a :	
	Réponse A	$f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-2x}}$
	Réponse B	$f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{-2x}+e^{x}}$
	Réponse C	$f(-x) = \dfrac{e^{x}}{1-e^{x}}$
	Réponse D	$f(x)+f(-x)=1$

6	$I = \int_1^3 (x-1)e^{-x}dx$	
	Réponse A	$I = e^{-1} - e^{-3}$
	Réponse B	$I = e^{-3} - 3e^{-1}$
	Réponse C	$I = 3e^{-3}$
	Réponse D	$I = e^{-1} - 3e^{-3}$

QCM 2

Choisir la bonne réponse :

1	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{x^2+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.	
	Réponse A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$
	Réponse B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
	Réponse C	La droite D d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
	Réponse D	L'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2	Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^4}$.	
	Réponse A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
	Réponse B	$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$
	Réponse C	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
	Réponse D	L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$

3	Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x-1}{e^x-x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.	
	Réponse A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
	Réponse B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
	Réponse C	La courbe C admet une asymptote horizontale.
	Réponse D	La courbe C admet une asymptote verticale.

4	Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$ et C sa courbe représentative:
Réponse A	f est une fonction paire
Réponse B	f est croissante
Réponse C	Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$
Réponse D	La courbe C admet deux asymptotes horizontales.

5	Une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{e^x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est
Réponse A	$x\mapsto\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$
Réponse B	$x\mapsto\ln(e^x+1)$
Réponse C	$x\mapsto\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
Réponse D	$x\mapsto\frac{e^x}{e^x+1}$

6	Soit $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{5x}$. On a
Réponse A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
Réponse B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
Réponse C	$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{2}{5}$
Réponse D	$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{1}{5}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$

2) $3e^{x} + 17e^{-x} - 20 = 0$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} 5e^{x} - 2e^{y} = 4 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1) $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x});\quad x \to -\infty$

2) $g(x) = xe^{\frac{1}{x^2}};\quad x \to 0$

3) $h(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{x^2 + 3x};\quad x \to 0$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{e^{x}}$.

Soit C la représentation graphique de la fonction f dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1.a) Calcuer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement.

b) Calcuer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

2.a) Montrer que : $f'(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Tracer la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

b) Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{x}$

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm .

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

3. Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes des coordonnées puis construire (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4.a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = f(x) + e^{x}$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire S du domaine plan délimité par la courbe (C) et les axes de coordonnées.

5. On définit une suite numérique (U_n) par son terme général : $U_n = f\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

a) Calculer U_1 , U_2 . Montrer que (U_n) est décroissante (On pourra utiliser les variations de f).

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f .

2.a) Donner une équation de la tangente T à C au point Ω d'abscisse 0.

b) Vérifier que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe (C). Que peut-on dire de ce point ?

c) Déduire la position relative de (C) et (T).

3.a) Tracer (C) et (T).

b) Calculer, en centimètre carré, l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), les axes des coordonnées et la droite d'équation $x=1$.

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

c) Déduire de 1.b) le tableau de variation de f^{-1}.

d) Déduire de ce qui précède les éléments géométriques de la courbe (C') et la tracer dans un nouveau repère.

Exercice 7

Soit la fonction numérique f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{x}{e^x}=xe^{-x}$

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f et vérifier que f est décroissante sur $[1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $4cm$.

2. On considère la suite numérique de terme général $U_n = f(n) = \frac{n}{e^n}$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

a) Calculer U_1 et U_2.

b) Prouver que la suite (U_n) est décroissante et positive (On peut utiliser 1.b)) puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

c)Démontrer que : $\forall n \in IN^*$; $\quad U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}} \quad (*)$

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

a) En utilisant l'égalité $(*)$ prouver que : $S_n = \frac{-1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})$.

b) Déduire de ce qui précède: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 8

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x + 2 + e^x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer et donner une interprétation graphique de :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+2))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α puis vérifier que $-2,5<\alpha<-2$.

5. Construire les courbes (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6.a) Déterminer la primitive F de f qui vérifie : $F(0)=0$.

b) Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x=\alpha$ et $x=0$.

Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α . Montrer que $A(\alpha)=\dfrac{6-2\alpha-\alpha^2}{2}$.

7.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0=\alpha$.

b) Vérifier que : $(f^{-1})'(0)=\dfrac{-1}{\alpha+1}$.

8. On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x)=\ln(x+2+e^x)\,.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

b) Dresser le tableau de variation de g .

c) Construire la courbe (Γ) de g dans un nouveau repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) L'équation $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

Posons $e^x = t$ avec $t > 0$. Alors l'équation $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ se ramène à une équation du second degré : $t^2 - t - 6 = 0$. Les solutions de cette équation sont $t_1 = 3 > 0$ et $t_2 = -2 < 0$. La dernière solution est négative, donc rejetée car pour tout réel x on a : $e^x > 0$. On a $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. On en déduit que l'équation admet une unique solution : $x = \ln 3$.

2) L'équation $3e^x + 17e^{-x} - 20 = 0$

Multiplions par e^x ; L'équation devient $3e^{2x} - 20e^x + 17 = 0$.

On pose de même $e^x = t$ avec $t > 0$.

Alors l'équation $3e^{2x} - 20e^x + 17 = 0$ devient $3t^2 - 20t + 17 = 0$.

Les solutions de cette équation sont $t_1 = 1 > 0$ et $t_2 = \frac{17}{3} > 0$.

On a $t_1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$ et $t_2 = \frac{17}{3} \Leftrightarrow e^x = \frac{17}{3} \Leftrightarrow x = \ln \frac{17}{3}$.

D'où l'ensemble de solutions : $S = \left\{0; \ln \frac{17}{3}\right\}$.

Corrigé 2

Le système $\begin{cases} 5e^x - 2e^y = 4 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$ s'écrit également $\begin{cases} 5e^x - 2e^y = 4 \\ e^x \times e^y = 6 \end{cases}$

On pose $a = e^x$ et $b = e^y$, avec a et b strictement positifs. Le système est alors équivalent à $\begin{cases} 5a - 2b = 4 \\ ab = 6 \end{cases}$.

Ce qui donne $\begin{cases} 5a - 2b = 4 \\ 5ab = 30 \end{cases}$

Par suite $(2b+4)b = 30$

Donc $(b+2)b = 15$

Soit $b^2 + 2b - 15 = 0$

Cette équation est une équation du second degré. Ces solutions sont $b = 3$ et $b = -5$. Mais b doit être strictement positif, donc la solution $b = -5$ ne convient pas. On a donc $b = 3$. On remplace pour calculer a : $5a - 2b = 4 \Leftrightarrow a = \frac{2b+4}{5}$. Donc $a = \frac{2\times 3+4}{5} = \frac{10}{5}$ soit $a = 2$.

Comme $(a,b) = (2,3) \Leftrightarrow (e^x, e^y) = (2,3)$; on en conclut que $(x,y) = (\ln 2, \ln 3)$ est l'unique solution du système.

Corrigé 3

Pour lever l'indétermination on procède à des changements d'écritures ou de variables pour faire apparaître des limites usuelles.

1) On écrit $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ et on procède à un changement de variable en posant $t = e^x$. Alors $(x \to -\infty) \Leftrightarrow (t \to 0^+)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$; (limite usuelle).

2) On écrit $g(x) = \frac{1}{x} \times \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}$.

D'une part, on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

D'autre part si on pose $t = \frac{1}{x^2}$, alors $(x \to 0) \Leftrightarrow (t \to +\infty)$ et on obtient :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$; (limite usuelle).

Conclusion :

Par produit : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$.

3) On écrit $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{x(x+3)} = \dfrac{e^x - 1}{x} \times \dfrac{1}{x+3}$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ **, (limite usuelle) et** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{3}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \dfrac{1}{3}$.

Corrigé 4

1.a) Calcul de limites :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^x}(x^2 - 2x + 1) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

En effet,

$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 - 2x + 1) = +\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{xe^x} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{xe^x}(x^2 - 2x + 1) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

En effet, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x+1) = +\infty$.

Interprétation graphique :

La courbe C admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$.

b) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On reconnaît les limites usuelles $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = 0^+, \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0^+$ dans la limite de f

en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{e^x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x} - 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)$$
$$= 0^+$$

Interprétation graphique :

La courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2.a) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2)e^x-(x^2-2x+1)e^x}{(e^x)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2-x^2+2x-1)e^x}{(e^x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+4x-3}{e^x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -(x^2-4x+3)e^{-x}$$

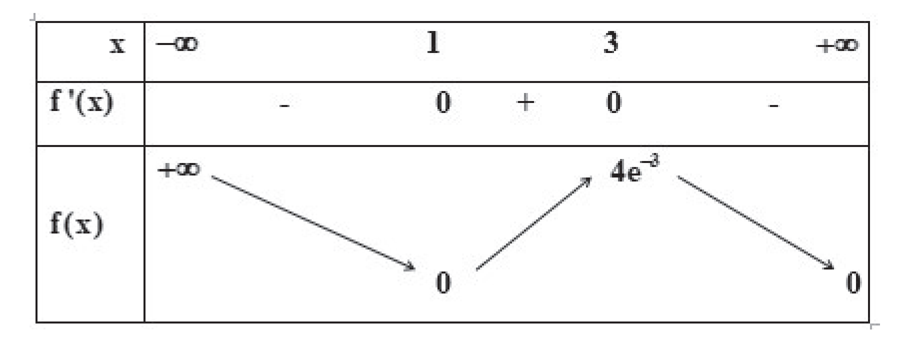
Enfin : $f'(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x}$.

b) Le signe de $f'(x)$ est le signe contraire de $(x-1)(x-3)$.

Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1;3]$.

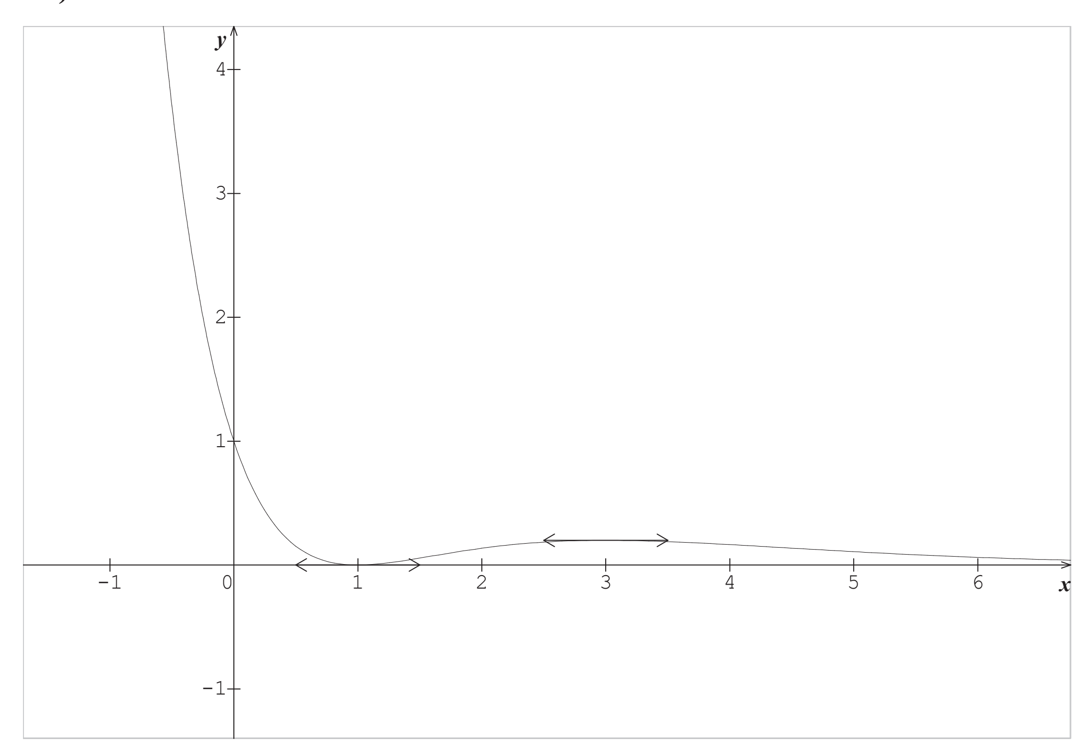
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 3)$ **et on a :** $f(1) = 0$ **et** $f(3) = 4e^{-3}$.

D'où le tableau de variations de f :



x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-3}$	↘	0

3.a) La courbe de f :



b) Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ est le même nombre de points d'intersection entre la courbe (C) et la droite horizontale Δ_m d'équation $y=m$.

D'après la représentation graphique de f, on déduit le tableau suivant :

valeurs du paramètre m	nombre d'intersections de (C) et Δ_m	nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$
$m<0$	Pas d'intersection	0
$m=0$	Une intersection (tangente)	1 solution double
$0<m<4e^{-3}$	3 intersections	3 solutions différentes
$m=4e^{-3}$	2 intersections	2 solutions différentes
$m>4e^{-3}$	Une seule intersection	Une unique solution

Corrigé 5

La fonction numérique f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+2)e^x$.

1) Calcul de limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2)e^x=\lim_{x\to-\infty} xe^x+2\lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

Interprétation graphique :

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe Γ de f au voisinage de $-\infty$. (C'est l'axe des abscisses)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^x=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}e^x=(1)(+\infty)=+\infty$$

Interprétation graphique :

La courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

2) Dérivée et variation de f :

On a $f(x)=(x+2)e^x \Rightarrow f'(x)=e^x+(x+2)e^x$

$f'(x)=(x+3)e^x$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+3)$ car pour tout réel x, $e^x>0$.

On a $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-3$ et $f(-3)=-e^{-3}$.

x	$-\infty$ -3 $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	0 ↘ $-e^{-3}$ ↗ $+\infty$

3) Intersections avec les axes :

Avec (Ox) : On résout l'équation $f(x)=0$

$$(x+2)e^x=0$$

$$x=-2$$

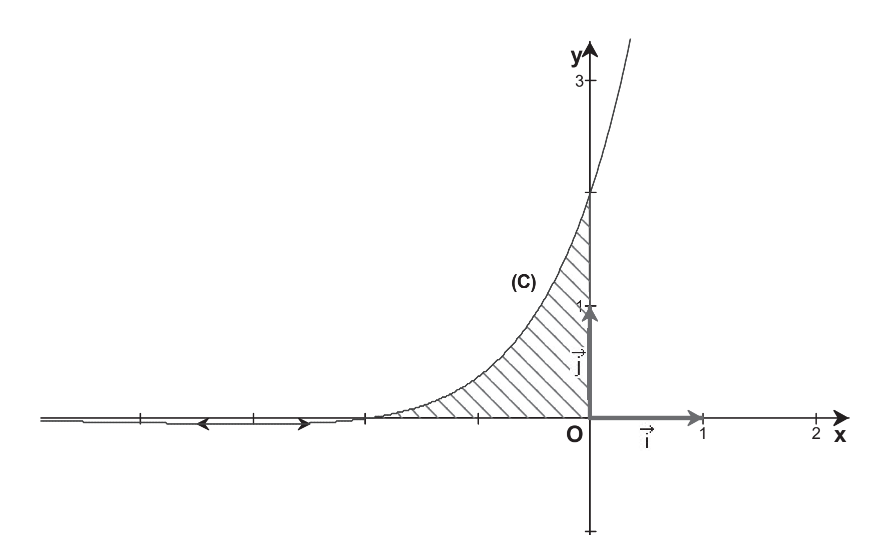
Alors (C) coupe (Ox) au point : $(-2;0)$.

Avec (Oy) : On calcule $f(0)$, on trouve $f(0)=2e^0=2$.

Alors (C) coupe (Oy) au point $(0;2)$.

Les points précédents sont placés sur la figure.

Construction de (C) :



4.a) On a $f'(x) = (x+3)e^x \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^x + e^x$

Alors, pour tout réel x **on a :** $f'(x) = f(x) + e^x$ **.**

On en déduit que $f(x) = f'(x) - e^x$

D'où, la fonction $F(x) = f(x) - e^x$ **est une primitive de f sur** $\mathbb{R}$

Soit $F(x) = (x+2)e^x - e^x = (x+1)e^x$ **.**

b) Le domaine plan délimité par la courbe (C) **et les axes de coordonnées est, d'autre part, limité par la courbe** (C)**, l'axe des abscisses et les droites d'équations** $x = -2$ **et** $x = 0$

Comme f est continue et positive sur l'intervalle $[-2,0]$**, l'aire S du domaine en question est calculée par :**

$$S = \int_{-2}^{0} f(x)dx \times ua$$

$$S = \big(F(0) - F(-2)\big) \times ua$$

$$S = (e^0 - (-e^{-2})) \times ua$$

$$S = (1 + e^{-2}) \times ua$$

L'unité de longueur est 1cm, donc l'unité d'aire est $ua = 1cm^2$. Donc $S = 1 + e^{-2} \quad cm^2$

5) La suite numérique (U_n) est définie par son terme général : $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

a) $U_1 = f(1) = 3e$

$U_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{e}$

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction f est strictement croissante.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on sait que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Alors $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < f\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc $U_{n+1} < U_n$. D'où la suite (U_n) est décroissante.

b) En posant $t = \frac{1}{n}$, on a $(n \to +\infty) \Leftrightarrow (t \to 0^+)$ et :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = f(0) = 2$ car f est continue en 0^+.

Corrigé 6

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = 0^+$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1} \\ &= 1\end{aligned}$$

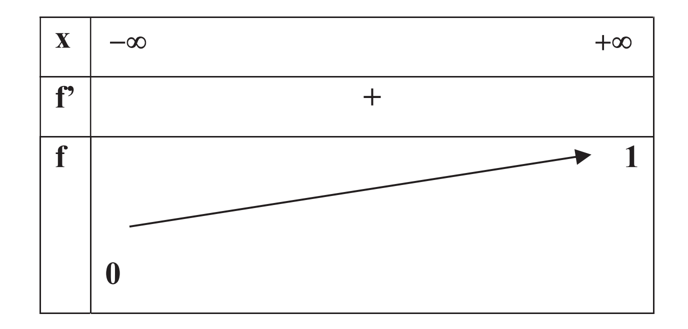
car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0^+$

Interprétation graphique :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ \Rightarrow$ **(C) admet une asymptote horizontale d'équation** $y = 0$ **au voisinage de** $-\infty$ **.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ **(C) admet une asymptote horizontale d'équation** $y = 1$ **au voisinage de** $+\infty$ **.**

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ **comme quotient de fonctions dérivables.** $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2}$ **soit** $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ **. On constate que** $f'(x) > 0$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}$ **. Donc f est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$ **.**



x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	0 ↗	1

2.a) Une équation de la tangente T à C au point Ω **d'abscisse 0 est du type**

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Donc T : $y = f'(0)(x) + f(0)$ **soit** $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$ **.**

b) Le point Ω **d'abscisse 0 a pour ordonnée** $f(0) = \dfrac{1}{2}$ **.**

Vérifions une égalité du type $f(2a - x) + f(x) = 2b$ **avec** $(a,b) = (0, \dfrac{1}{2})$

Comme $a = 0$ **, on a :** $2a - x = -x \in D_f ; \forall x \in D_f$ **car** $D_f = \mathbb{R}$ **, et**

$$f(2a-x)=f(-x)$$
$$=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$
$$=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\times\frac{e^{x}}{e^{x}}$$
$$=\frac{1}{e^{x}+1}$$

Donc , $f(2a-x)+f(x)=\frac{1}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$ ce qui donne

$$f(2a-x)+f(x)=\frac{1+e^{x}}{e^{x}+1}$$
$$=1$$
$$=2\times\frac{1}{2}$$
$$=2b$$

D'où $\Omega(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

Le point $\Omega(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie appartenant à la courbe d'une fonction dérivable. Donc $\Omega(0,\frac{1}{2})$ représente aussi un point d'inflexion de cette courbe.

c) La tangente à C à son point d'inflexion traverse cette courbe. Alors la position relative de (C) et (T) change au point Ω .

$$f'(x)=\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}\Rightarrow f''(x)=\frac{e^{x}(1+e^{x})^{2}-2e^{x}(1+e^{x})e^{x}}{(1+e^{x})^{4}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{e^{x}(1+e^{x}-2)}{(1+e^{x})^{3}}$$

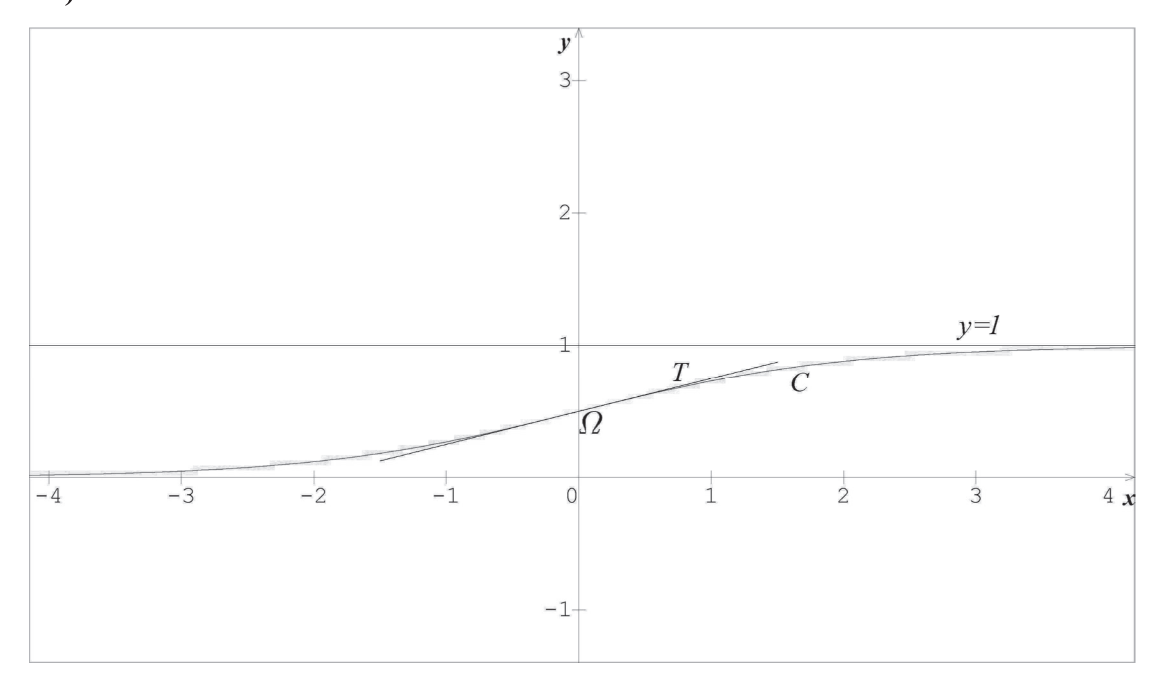
$$\Rightarrow f''(x)=\frac{e^{x}(e^{x}-1)}{(1+e^{x})^{3}}$$

Le signe de la dérivée seconde est celui de $(e^{x}-1)$

pour $x \leq 0$ on a $e^x - 1 \leq 0$, donc la courbe C est au dessus de T : (C / T) ;

pour $x \geq 0$ on a $e^x - 1 \geq 0$, donc la courbe C est en dessous de T : (T / C).

3.a) Courbe de f :



d) L'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), les axes des coordonnées et la droite d'équation $x = 1$ est exactement limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses , et les droites d'équations $x = 0$ (l'axe Oy), et $x = 1$.

La fonction f étant continue est positive sur l'intervalle $[0,1]$.

Par conséquent, l'aire A est calculée par l'intégrale : $A = \int_0^1 f(x)dx$

On reconnaît dans l'écriture de $f(x)$ le modèle : $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, avec

$u(x) = e^x + 1$. Or, pour tout x réel, $e^x + 1 > 0$ donc la fonction $F(x) = \ln(e^x + 1)$ est une primitive de f.

$$A = \int_0^1 f(x)dx$$

$$A = \left[\ln(e^x + 1)\right]_0^1$$

$$A = \ln(e+1) - \ln 2$$

$$A = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$A \simeq 0,62$ **unité d'aire.**

On a $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm **, donc une unité d'aire est** $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 1\ \text{cm}^2$ **.**

Par suite $A \simeq 0,62$ **centimètre carré.**

4.a) On a :

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ **, avec** $f(\mathbb{R}) = \left]0;1\right[$

Alors $f : \mathbb{R} \to J$ **est bijective avec** $J = \left]0,1\right[$ **.**

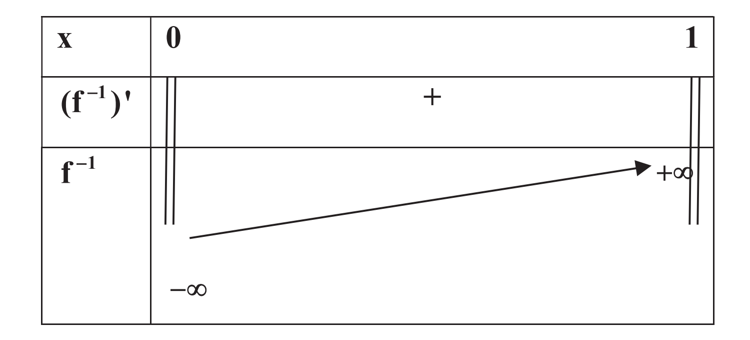
b) Pour exprimer $f^{-1}(x)$ **, on pose** $y = f(x)$ **avec** $y \in \left]0,1\right[$

On a :

$$y = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow y(1+e^x) = e^x$$
$$\Leftrightarrow y + ye^x = e^x$$
$$\Leftrightarrow ye^x - e^x = -y$$
$$\Leftrightarrow (y-1)e^x = -y$$
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{-y}{y-1}$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-y}{y-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

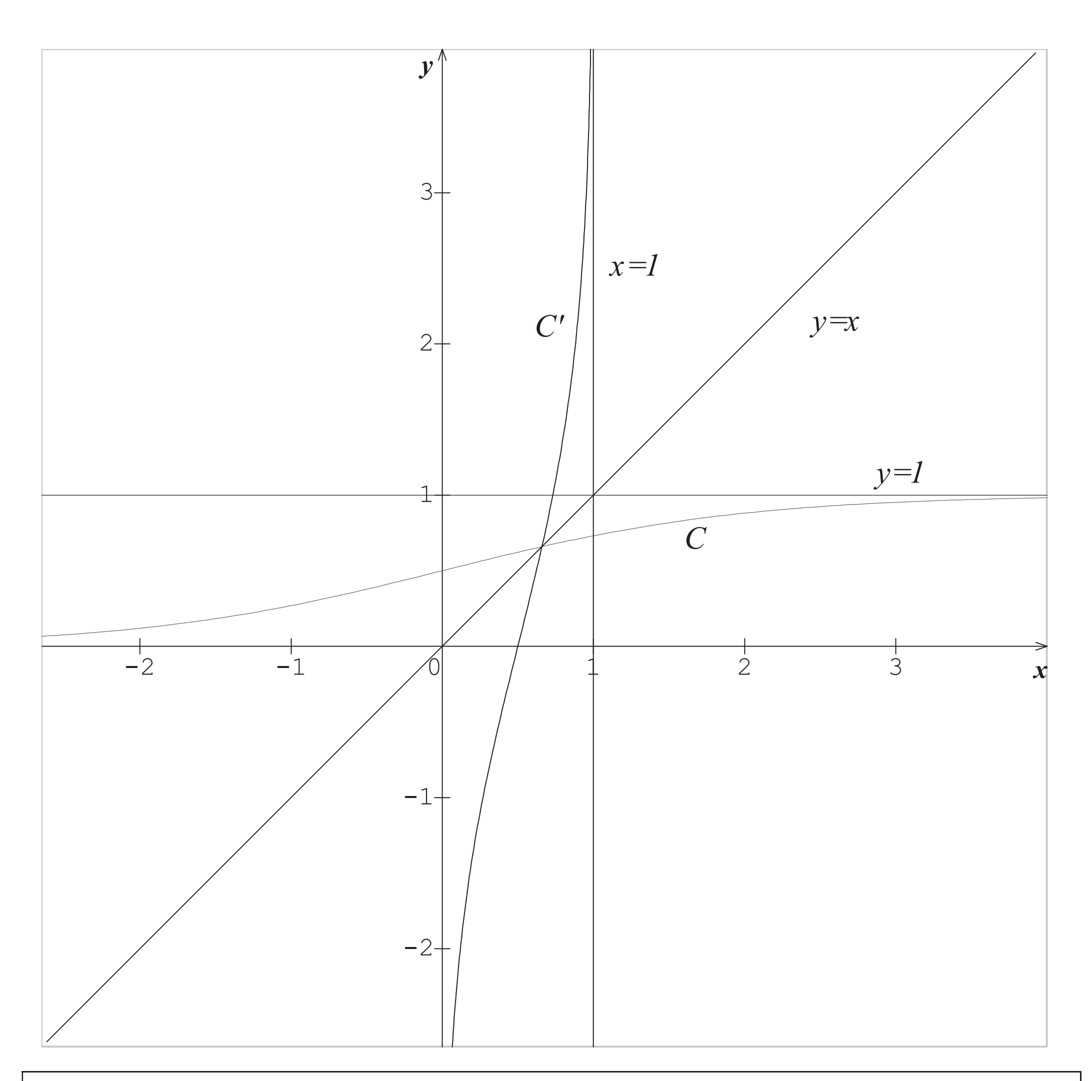
D'où $= f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right),\ x \in \left]0,1\right[$

c) Le tableau de variation de f^{-1} **se déduit directement de celui de f :**



d) La courbe (C') est symétrique à (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$. En effet :

La courbe (C)	**La courbe (C')**
Admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, (l'axe (Ox))	**Admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$, (l'axe (Oy))**
Admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$	**Admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$**
Coupe (Oy) au point $\Omega(0;\frac{1}{2})$	**Coupe (Ox) au point $\Omega'(\frac{1}{2};0)$**
Admet leu point $\Omega(0;\frac{1}{2})$ comme centre de symétrie	**Admet leu point $\Omega'(\frac{1}{2};0)$ comme centre de symétrie**



Corrigé 7

La fonction f est définie par : $f(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$.

1) <u>Calcul de limites :</u>

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = -\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}=+\infty$$

(On reconnaît les limites usuelles $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$).

<u>Interprétation graphique</u>

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$, et une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$.

b) La dérivée :

$$f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(1-x)e^x}{e^x\times e^x}$$

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$$

Le signe de f '(x) est celui de son numérateur $(1-x)$, car $e^x>0$ pour tout réel x.

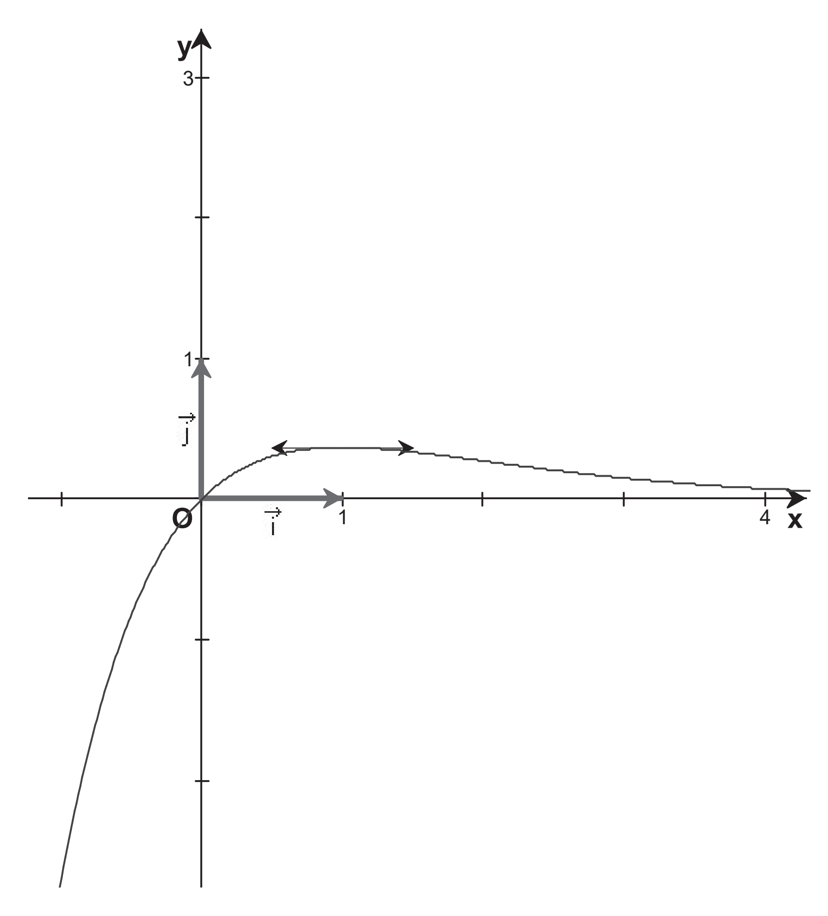
Comme pour tout x de l'intervalle $\left[1;+\infty\right[$, on a $1-x\le 0$; donc sur cet intervalle $f'(x)\le 0$.

On en déduit que f est décroissante sur $\left[1;+\infty\right[$.

c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

Courbe de f :



2) La suite (U_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par son terme général

$$U_n = f(n) = \frac{n}{e^n}.$$

a) Calcul de termes :

$$U_1 = f(1) = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$U_2 = f(2) = \frac{2}{e^2} = 2e^{-2}$$

b) Nous savons d'après la question 1.b) que f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. Alors pour tout $n \geq 1$, on a :

$n < n+1 \Rightarrow f(n) > f(n+1)$ car la fonction décroissante inverse l'ordre.

C'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$ on a $U_n > U_{n+1}$.

Alors la suite (U_n) est décroissante.

D'autre part $U_n > 0$ car rapport de deux positifs : $U_n = \frac{n}{e^n}$.

On peut remarquer aussi, d'après le tableau de variations de f, que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$. Comme $U_n = f(n)$ et $n > 0$, $U_n > 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$. (Limite calculée au 1.a)

c) Pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} = \frac{1}{e} U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$ (*)

on a : $U_{n+1} = f(n+1)$

$$U_{n+1} = \frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e} \times \frac{n+1}{e^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}\left(\frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n}\right)$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}\left(U_n + \frac{1}{e^n}\right)$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$$

3) Pour tout entier $n \geq 1$; $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

D'après l'égalité (*) on a :

$$\begin{cases} U_2 = \frac{1}{e}U_1 + \frac{1}{e^2} \\ U_3 = \frac{1}{e}U_2 + \frac{1}{e^3} \\ U_4 = \frac{1}{e}U_3 + \frac{1}{e^4} \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ U_n = \frac{1}{e}U_{n-1} + \frac{1}{e^n} \end{cases}$$

En sommant membre à membre ces égalités :

$$U_2 + U_3 + \ldots + U_n = \frac{1}{e}\left(U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}\right) + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$$

soit $$S_n - U_1 = \frac{1}{e}(S_n - U_n) + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$$

Comme la partie $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ représente la somme de $(n-1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{e^2}$ et de raison $\frac{1}{e}$, donc:

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e^2} \times \frac{1 - \frac{1}{e^{n-1}}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{n-1}}}{e^2 - e}$$

Or $U_1 = \frac{1}{e}$, donc $$S_n - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(S_n - U_n) + \frac{1 - \frac{1}{e^{n-1}}}{e^2 - e}$$

$$(1-\frac{1}{e})S_n = \frac{1}{e} - \frac{1}{e}U_n + \frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n = \frac{e-1}{e^2-e} - \frac{1}{e}U_n + \frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n = -\frac{1}{e}U_n + \frac{e-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n = -\frac{1}{e}U_n + \frac{1-\frac{1}{e^{n}}}{e-1}$$

$$S_n = -\frac{e}{e-1}\bullet\frac{1}{e}U_n + \frac{e}{e-1}\bullet\frac{1-\frac{1}{e^{n}}}{e-1}$$

$$S_n = \frac{-1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})$$

b) On sait que $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ **.**

Cela entraîne que $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{e^n}) = 1$

et $\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n}) = \frac{e}{(e-1)^2}$ **.**

Or $\lim_{n\to+\infty}U_n = 0$ **, donc** $\lim_{n\to+\infty}S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$ **.**

Corrigé 8

La fonction numérique f est définie par : $f(x) = x + 2 + e^x$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm .

1.a) On a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$. **Alors** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. **Alors** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+2)) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$ au voisinage de $-\infty$.

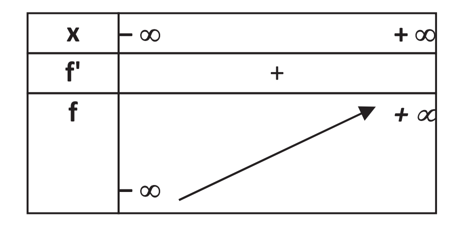
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2 + e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty .$$

Interprétation graphique :

La courbe (C) a une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

2. Tableau de variation de f

$f'(x) = 1 + e^x$. Donc $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. La fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ car :

- **f est continue sur $\mathbb{R}$;**
- **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;**
- **$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.**

4. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque :

- **f est continue sur $\mathbb{R}$;**
- **f change de signe sur $\mathbb{R}$.**

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $\mathbb{R}$.

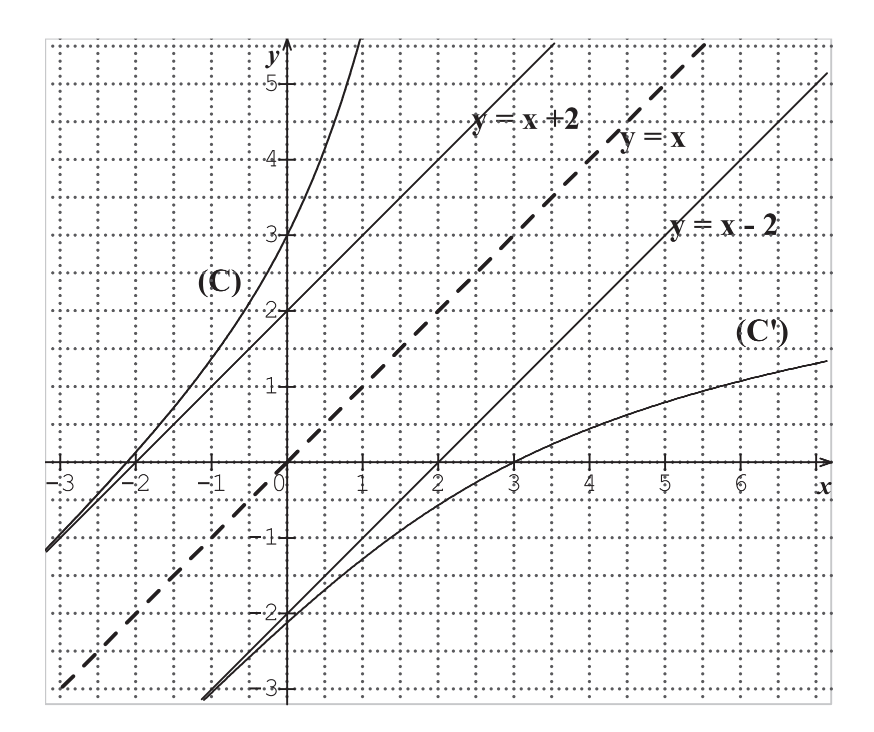
Cette solution est unique car f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En utilisant la calculatrice on trouve $f(-2,5) \approx -0,418$ et $f(-2) \approx 0,135$. Donc $f(-2,5) \cdot f(-2) < 0$. D'où $-2,5 < \alpha < -2$.

5. Construction :

Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$:

La courbe (C)	La courbe (C')
Admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$ au voisinage de $-\infty$	Admet une asymptote oblique d'équation $x = y + 2$ au voisinage de $-\infty$
Admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.	Admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.
Coupe (Oy) en (0,3)	Coupe (Ox) en (3,0)
Coupe (Ox) en (α,0)	Coupe (Oy) en (0,α)



6.a) Comme les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x$ et $x \mapsto e^x$ sont respectivement des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions $x \mapsto x + 2$ et $x \mapsto e^x$; on déduit que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + e^x + k$ où k est un réel quelconque, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Si $F(0) = 0$, alors on a $1 + k = 0$, d'où $k = -1$ et on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + e^x - 1$$

b) Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

Pour calculer, en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan limité par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ où α est la

solution de l'équation $f(x)=0$; on constate que f est continue et positive sur l'intervalle $[\alpha;0]$. Alors : $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$

$$A(\alpha)=F(0)-F(\alpha)=-F(\alpha)$$

donc : $A(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha+e^{\alpha}-1$.

Puisque α est la solution de l'équation $f(x)=0$; on a $\alpha+2+e^{\alpha}=0$, alors $e^{\alpha}=-\alpha-2$.

$$F(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha+(-\alpha-2)-1=\frac{1}{2}\alpha^2+\alpha-3 \text{ d'où } F(\alpha)=\frac{\alpha^2+2\alpha-6}{2}$$

Comme $A(\alpha)=-F(\alpha)$, on trouve $A(\alpha)=\frac{6-2\alpha-\alpha^2}{2}$.

7.a) Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0=\alpha$ est donnée par : $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$.

On a $f'(\alpha)=1+e^{\alpha}$ et $f(\alpha)=0$, d'où l'équation de T :

$y=(1+e^{\alpha})(x-\alpha)$ soit $y=(1+e^{\alpha})x-\alpha(1+e^{\alpha})$.

Comme $e^{\alpha}=-\alpha-2$, on obtient l'équation suivante de T :

$$y=-(1+\alpha)x+\alpha(1+\alpha)$$

b) On sait que $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Donc $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$

Comme $f(\alpha)=0$, on a $(f^{-1})(0)=\alpha$. Donc $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(\alpha)}$

Comme $f'(\alpha)=1+e^{\alpha}$, on a $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{1+e^{\alpha}}$.

Mais $f(\alpha)=0$ implique $\alpha+2+e^{\alpha}=0$, donc $(\alpha+1)+(1+e^{\alpha})=0$.

Alors $1+e^{\alpha}=-(\alpha+1)$ et $\frac{1}{1+e^{\alpha}}=\frac{1}{-(\alpha+1)}$

Conclusion : $(f^{-1})'(0)=\frac{-1}{\alpha+1}$.

8. La fonction numérique g définie par : $g(x)=\ln(x+2+e^{x})$,

a) On remarque que $g(x)=\ln(f(x))$.

Donc g est définie si $f(x)>0$.

D'après le tableau de variation de f on a : $f(x)>0 \Leftrightarrow x>\alpha$.

D'où l'ensemble de définition de g est $D_g=]\alpha,+\infty[$.

b) On a :

$\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x)=\lim\limits_{t\to 0^+}\ln t=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$

Comme f est dérivable et strictement positive sur $D_g=]\alpha,+\infty[$, la fonction g est dérivable sur $D_g=]\alpha,+\infty[$, et $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

On sait que $f'(x)>0$ et $f(x)>0$ sur $D_g=]\alpha,+\infty[$. Alors $g'(x)>0$. Donc g est strictement croissante sur $D_g=]\alpha,+\infty[$.

Remarque :

On peut remarquer que la fonction g est la composée de deux fonctions croissantes : $x\mapsto f(x)$ et $x\mapsto \ln x$.

Donc g est croissante.

Tableau de variation de g :

x	α		$+\infty$
g'	||	+	
g	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

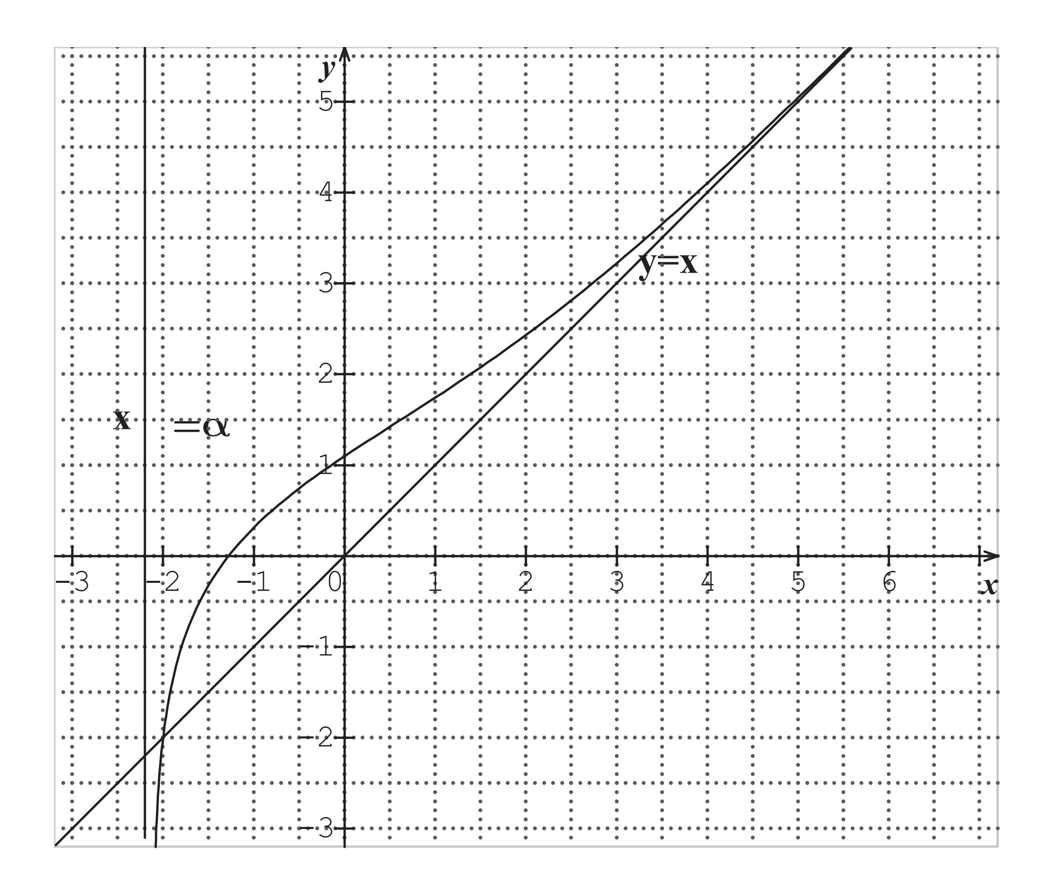
c) Pour la construction de la courbe (Γ) de g, on a:

$\lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x) = -\infty$, **donc la courbe Γ admet une asymptote verticale d'équation $x = \alpha$.**

On peut écrire : $g(x) = \ln e^x(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1) = x + \ln(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1) = 0$

Alors la courbe Γ admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.



y
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
x
y=x
x =α

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) En déduire que la courbe (C) possède trois asymptotes dont on donnera des équations.

2.a) Calculer la dérivée de la fonction f et vérifier que pour tout x non nul : $f'(x)=\dfrac{-f(x)}{e^x-1}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Montrer que la fonction g restriction de f sur $I=]0,+\infty[$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer l'expression de la réciproque g^{-1} de g.

4.a) Montrer que la courbe (C) possède le point $\Omega(0,\dfrac{1}{2})$ comme centre de symétrie.

b) Construire les courbes (C) et (C') représentatives des fonctions f et g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + (x-1)e^x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + xe^x$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

Partie B : étude et représentation de la fonction f

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

3.a) Calculer f'(x) puis, à l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $0,4 < x_0 < 0,5$.

4.a) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente T à la courbe est parallèle à l'asymptote (D). Donner l'équation de T.

b) Tracer (C) , T et (D).

c) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x - 1 - me^{-x} = 0$.

Exercice 3

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x - x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\,\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x - x - 1$.

1. Etudier les variations de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de *g*.

2. Justifier que pour tout *x*, $e^x - x > 0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction *f* en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a. Calculer $f'(x)$, *f'* désignant la fonction dérivée de *f*.

b. Etudier le sens de variation de *f* puis dresser son tableau de variation.

3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 2x - 1 + 2e^x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1.a) Justifier que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer et donner une interprétation graphique de : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-1))$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2.a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α puis vérifier que $-0,3 < \alpha < -0,2$.

3) Construire les courbes (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = \alpha$.

b) Vérifier que : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{-2\alpha+3}$.

5) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_n = f(n)$

a) Montrer que (U_n) est la somme de deux suites : une arithmétique et une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (3x-1)\right)$ et interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ interpréter graphiquement.

2.a) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β. Vérifier que $-1,3 < \alpha < -1,2$ et $0,2 < \beta < 0,3$.

b) Représenter la courbe (C).

4) On définit les suites (U_n) et (V_n) pour tout entier naturel n par : $U_n = e^{-2n-1}$, $V_n = 3n - 1$.

a) Démontrer que la suite (U_n) est géométrique décroissante.

b) Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique croissante.

c) Les suites (U_n) et (V_n) sont- elles adjacentes ? Justifier.

5) Pour tout entier naturel n on pose : $S_n = f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(n)$.

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2+2x+1)e^x$

Soit C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1.a) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que la courbe C admet deux tangentes horizontales que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variation f .

3) Déterminer l'intersection de C avec les axes des coordonnées puis construire C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 et calculer $(g^{-1})'(1)$.

5.a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$.

Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que pour tout réel x on a : $e^{2x} - e^{x} + 1 > 0$. En déduire le domaine de définition de f.

2.a) Calcuer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

b) Calcuer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x)$ et interpréter graphiquement.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4.a) Donner une équation de la tangente T au point de (C) d'ordonnée nulle.

b)Tracer la courbe (C) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

5) Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue *x* :

$e^{2x} - e^{x} + 1 = \frac{7}{8}$ par deux méthodes :

a. par le calcul,

b. en utilisant la courbe (C).

Exercice 8

1. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = xe^{x} - e^{x} - 1$.

a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calculer $g'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1,2 \le \alpha \le 1,3$.

e) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-2)(e^x-1)$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité $2cm$.

a) Calculer les limites suivantes et en donner des interprétations graphiques :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ et } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x+2)).$$

b) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f on utilisera 1.e).

c) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha)^2}{1-\alpha}$ puis en déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(\alpha)$.

d) Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes des coordonnées.

e) Construire la courbe (C).

f) En utilisant une intégration par parties, calculer en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=2$.

Exercice 9(Traduit)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=(x^2-2x+1)e^x$	**لتكن الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي:** $f(x)=(x^2-2x+1)e^x$.
Soit C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ **d'unité 1cm.**	**وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لها في مرجع قائم ومنتظم** $(O;\vec{i},\vec{j})$ **وحدته 1cm.**
1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, **interpréter graphiquement ;**	**a.1) احسب** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **وفسر بيانيا.**
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, **interpréter graphiquement.**	**b) احسب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ **وفسر بيانيا.**
2. Calculer $f'(x)$ **et vérifier que C admet deux tangentes horizontales que l'on déterminera.**	**2) احسب المشتقة** $f'(x)$ **للدالة f وتحقق أن المنحنى C يقبل مماسين أفقيين يطلب تحديدهما.**
3. Dresser le tableau de variation f	**3) ارسم جدول تغيرات f .**
4. Déterminer l'intersection de C avec les axes des coordonnées puis construire C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.	**4) حدد تقاطع المنحنى C مع محوري الإحداثيات ثم مثله في المرجع** $(O;\vec{i},\vec{j})$.
5.a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ **soit une primitive de f sur IR.**	**a.5) عين الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث تكون الدالة** $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ **أصلية للدالة f على IR.**
b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ **et** $x=1$.	**b) احسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما** $x=0$ **و** $x=1$.

CHAPITRE 7 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I. RESUME DE COURS

A) Introduction

- **Une équation différentielle est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction f. De plus, cette équation fait intervenir la fonction f ainsi que ses dérivées, d'où le terme différentiel.**
- **Les équations différentielles apparaissent naturellement dans de nombreux domaines : physique, électricité, biologie, évolution des populations, modélisation informatique….**

B) L'équation $y'+ay=0$, (a réel).

1.Définitions

L'équation différentielle $y'+ay=0$, (a réel) est appelée équation différentielle homogène du premier degré.

Une fonction f est solution de l'équation différentielle $y'+ay=0$ sur un intervalle I si f est dérivable sur I telle que $f'(x)+af(x)=0$, pour tout x de I.

2. Solutions générales

Les fonctions solutions générales sur un intervalle I de l'équation différentielle $y'+ay=0$ sont les fonctions définies sur I par $y(x)=Ae^{-ax}$ où A est un réel quelconque.

3. Solution particulière

Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y'+ay=0$ satisfaisant la condition initiale $y(x_0)=y_0$. C'est la fonction $y(x)=y_0e^{-a(x-x_0)}$.

Cette fonction est appelée solution particulière de l'équation.

C) L'équation $y''+ay'+by=0$, (a , b réels).

1. Définitions

L'équation différentielle $y''+ay'+by=0$ où a et b sont des réels est appelée équation différentielle homogène de second ordre sans second membre.

L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$ est l'équation $r^2+ar+b=0$, d'inconnue $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. Solutions générales

La solution générale de l'équation différentielle (ED) : $y''+ay'+by=0$ est donnée suivant les solutions de son équation caractéristique (EC) comme l'indique le tableau suivant (A,B réels quelconques) :

$\Delta = a^2 - 4b$	Solutions de l'(EC)	Solution générale de l'(ED)
$\Delta > 0$	$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$; $r_1 \neq r_2$	$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	$r \in \mathbb{R}$	$y(x) = (Ax+B)e^{rx}$
$\Delta < 0$	$\alpha + i\beta, \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

3. Cas particuliers

Equations différentielle	Solution générale de l'(ED), A , $B \in \mathbb{R}$
$y''=0$	$y(x) = Ax+B$
$y''-w^2y=0$	$y(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}$
$y''+w^2y=0$	$y(x) = A\cos wx + B\sin wx$

4. Résolution avec des conditions initiales

Théorème

Il existe une unique fonction solution de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$ satisfaisant les conditions initiales : $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$; x_0, y_0 et y_0' étant des réels donnés.

D) Equations à second membre

1. Définitions

L'équation différentielle (E) : $y'(x)+ay(x)=u(x)$ où a est un réel constant et u une fonction, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

L’équation (E_0) : $y'(x)+ay(x)=0$ est appelée son équation différentielle homogène associée (sans second membre).

L’équation différentielle (E) : $y''(x)+ay'(x)+by(x)=u(x)$ où a et b sont des réels constant et u une fonction, est appelée équation différentielle linéaire du deuxième ordre avec second membre.
L’équation (E_0) : $y''(x)+ay'(x)+by(x)=0$ est appelée son équation différentielle homogène associée (sans second membre).

2. Solution générale de l'équation différentielle avec second membre

Théorème
La solution générale de l’équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre (E) à coefficients constants et avec second membre, est obtenue en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de l’équation différentielle homogène (E_0) associée.

Méthode de résolution
Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre (E) à coefficients constants et avec second membre, on procédera donc en trois étapes ´ :
1) Résolution de l’équation sans second membre associée (E_0) ;
2) Détermination d’une solution particulière de l’équation (E) ;
3) Conclusion : la solution générale de (E), c’est la solution générale de (E_0) plus une solution particulière de (E).

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Choisir la bonne réponse :

1	**L'équation différentielle $y'+7y=0$ admet pour solutions générales les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par**	
	Réponse A	Ae^{7x} ; $A \in \mathbb{R}$
	Réponse B	Ae^{-7x} ; $A \in \mathbb{R}$
	Réponse C	$7e^{-Ax}$; $A \in \mathbb{R}$
	Réponse D	$7e^{Ax}$; $A \in \mathbb{R}$

2	**L'équation différentielle $3y'+5y=0$ admet pour solutions générales les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par**	
	Réponse A	Ae^{-5x} ; $A \in \mathbb{R}$
	Réponse B	Ae^{-3x} ; $A \in \mathbb{R}$
	Réponse C	$Ae^{-\frac{3}{5}x}$; $A \in \mathbb{R}$
	Réponse D	$Ae^{-\frac{5}{3}x}$; $A \in \mathbb{R}$

3	**Parmi les fonctions laquelle est solution de l'équation différentielle $y'+y=2x+2$?**	
	Réponse A	$f(x)=e^{-x}+2x+1$
	Réponse B	$f(x)=e^{-x}+x+3$
	Réponse C	$f(x)=e^{x}-2x$
	Réponse D	$f(x)=e^{-x}+2x$

4	**L'équation différentielle $y''+16y=0$ admet pour solutions générales les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par**	
	Réponse A	$y(x)=Ae^{-16x},\ A\in\mathbb{R}$
	Réponse B	$y(x)=Ae^{16x}+Be^{-16x},\ A\ ,\ B\in\mathbb{R}$
	Réponse C	$y(x)=Ae^{4x}+Be^{-4x},\ A\ ,\ B\in\mathbb{R}$
	Réponse D	$y(x)=A\cos 4x+B\sin 4x,\ A\ ,\ B\in\mathbb{R}$

5	**L'équation différentielle $y''-4y=0$ admet pour solutions générales les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par**	
	Réponse A	$y(x)=Ae^{-4x},\ A\in\mathbb{R}$
	Réponse B	$y(x)=Ae^{4x},\ A\in\mathbb{R}$
	Réponse C	$y(x)=Ae^{2x}+Be^{-2x},\ A\ ,\ B\in\mathbb{R}$
	Réponse D	$y(x)=A\cos 2x+B\sin 2x,\ A\ ,\ B\in\mathbb{R}$

6	**La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{x}$ est solution de l'équation différentielle :**	
	Réponse A	$y'-y=e^{x}$
	Réponse B	$y'+y=2e^{x}+x$
	Réponse C	$y'+y=(x+1)e^{x}$
	Réponse D	$y'=(x+1)y$

QCM 2

Choisir la bonne réponse :

1	La solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ telle que $y(3) = 4$ est	
	Réponse A	$y(x) = 4e^{-2x-2}$
	Réponse B	$y(x) = 4e^{2x-6}$
	Réponse C	$y(x) = 4e^{-2x-6}$
	Réponse D	$y(x) = 4e^{2x-3}$

2	La solution particulière de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$ dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(4, 5)$ est	
	Réponse A	$y(x) = 4e^{5x-3}$
	Réponse B	$y(x) = 4e^{-3x-5}$
	Réponse C	$y(x) = 5e^{-3x-4}$
	Réponse D	$y(x) = 5e^{-3x+12}$

3	La solution particulière de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$ est	
	Réponse A	$y(x) = \cos 2x + \sin 2x$
	Réponse B	$y(x) = \cos 2x$
	Réponse C	$y(x) = \sin 2x$
	Réponse D	$y(x) = -\sin 2x$

4	L'équation différentielle $y' = 3y + 2$ admet pour solutions générales les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par	
	Réponse A	$y(x) = Ae^{3x} - 2,\ A \in \mathbb{R}$
	Réponse B	$y(x) = Ae^{3x} + 2,\ A \in \mathbb{R}$
	Réponse C	$y(x) = Ae^{3x} + \frac{2}{3},\ A \in \mathbb{R}$
	Réponse D	$y(x) = Ae^{3x} - \frac{2}{3},\ A \in \mathbb{R}$

5	L'équation différentielle $y'' - y' = 1$ admet pour	
	Réponse A	équation caractéristique : $r^2 - r - 1 = 0$
	Réponse B	équation homogène associée : $y'' - y' - 1 = 0$
	Réponse C	solution particulière : $y(x) = 2e^x + 2x + 1$
	Réponse D	solution générale : $y(x) = Ae^x + B - x,\ A\ ,\ B \in \mathbb{R}$

6	L'équation différentielle $y'' + 9y = x + 1$ admet comme solution générale	
	Réponse A	$f(x) = \frac{1}{9}(x+1)$
	Réponse B	$f(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x),\ A\ ,\ B \in \mathbb{R}$
	Réponse C	$f(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{1}{9}(x+1),\ A\ ,\ B \in \mathbb{R}$
	Réponse D	$f(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x} + \frac{1}{9}(x+1)$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle E sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

	L'équation différentielle E	La fonction f
1	$y'(x)+\sin x=0$	$f(x)=\cos x$
2	$y'-5y=0$	$f(x)=3e^{5x}$
3	$y''-2y'+y=0$	$f(x)=(Ax+B)e^{x}$, où A et B sont des réels

Exercice 2

Donner la solution générale de l'équation différentielle dans chacun des cas suivants :

1) $y'+5y=0$

2) $y'-2y=0$

3) $5y'+3y=0$

Exercice 3

1) **Donner la solution générale de l'équation différentielle $y'+3y=0$.**

2) **Donner la solution particulière satisfaisant la condition initiale $y(1)=2$.**

Exercice 4

Compléter le tableau suivant par l'équation caractéristique :

Equation différentielle (ED)	Equation caractéristique (EC)
$y''+3y'+2y=0$	
$y''-4y'+4y=0$	
$y''+4y'+5y=0$	

$y''+9y=0$	
$y''-4y=0$	
$y''+3y'=0$	

Exercice 5

Compléter le tableau suivant :

Equation différentielle (ED)	Équation caractéristique (EC)	Δ	Solutions de l'(EC)	Solution générale de l'(ED)
$y''-5y'+6y=0$				
$y''-6y'+9y=0$				
$y''+4y'+13y=0$				

Exercice 6

Compléter le tableau suivant :

Equation différentielle (ED)	Solution générale de l'(ED)
$y''-25y=0$	
$y''+9y=0$	
$y''-3y=0$	
$y''+7y=0$	

Exercice 7

1) **Donner la solution générale de l'équation différentielle :**

$$y''+4y'-12y=0.$$

2) **Donner la solution particulière qui vérifie les conditions :**

$$y(0)=7 \text{ et } y'(0)=2.$$

Exercice 8

Soit (E) l'équation différentielle : $y' - y = -e^x$ et (E_0) : $y' - y = 0$.

1) Vérifier que la fonction définie par $f_0(x) = (3 - x)e^x$ est solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle (E_0).

3) Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

4) En déduire les solutions générales de (E).

Exercice 9

Compléter le tableau suivant par l'équation homogène :

Equation différentielle avec second membre (E)	Equation homogène associée : (E_0)
$y' + 2y = e^x$	
$y' - 3y = 7$	
$4y' + 5y = x^2 + 2x + 3$	
$y'' - 4y' + 5y = 2x + e^x$	
$y'' - 9y = \cos x$	

Exercice 10

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = x^2$

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y' - 3y = 0$.

2) Trouver une solution particulière de (E) du type $y_0(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

Exercice 11

Soit (E) l'équation différentielle : $y''-4y'+4y=2-8\sin x\cos x$.

1) Vérifier que la fonction définie par $f_0(x)=\sin^2 x$ est solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) associée.

3) En déduire les solutions générales de (E).

Exercice 12

On note $f(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 existant à l'instant t dans un échantillon de matière organique. On montre que la fonction f vérifie pour tout réel t : $f'(t)=-kf(t)$ et $f(0)=N_0$ où k est un réel strictement positif (constante radioactive de l'élément).

1) Donner l'expression de $f(t)$ en fonction de N_0, k et t.

2) On appelle période (ou demi-vie) de l'élément radioactif le temps T au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés. Sachant que $k=1,238\times10^{-4}$ et que t est évalué en années, déterminer la demi-vie du carbone14.

3) Le carbone14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci l'assimilation cesse et le carbone14 présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone14 est 40% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin. Calculer l'âge de ces fragments.

Exercice 13

La population y d'une ville évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette population double tous les dix ans. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) La fonction $f(x)=\cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$y(x)=\cos x \Rightarrow y'(x)=-\sin x \Rightarrow y'(x)+\sin x=0$, d'où la fonction $f(x)=\cos x$ est solution de l'équation différentielle E sur $\mathbb{R}$.

2) Si $f(x)=3e^{5x}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=3\times 5e^{5x}=15e^{5x}$.
Dans l'équation différentielle $y'-5y=0$, on remplace y par $f(x)$ et y' par $f'(x)$:
On obtient $f'(x)-5f(x)=15e^{5x}-15e^{5x}=0$ ce qui montre que l'équation est vérifiée. Alors la fonction $f(x)=3e^{5x}$ est solution de l'équation différentielle $y'-5y=0$ sur $\mathbb{R}$.

3) Toute fonction du type $f(x)=(Ax+B)e^{x}$ où A et B sont des réels est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si on remplace $y(x)$ par $f(x)$, $y'(x)$ par $f'(x)$ et $y''(x)$ par $f''(x)$; l'équation est vérifiée.
Alors la fonction $f(x)=(Ax+B)e^{x}$ est solution de l'équation différentielle $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé 2

Equation différentielle	Solution générale
$y'+5y=0$	$y(x)=Ae^{-5x}$, A réel quelconque
$y'-2y=0$	$y(x)=Ae^{2x}$, A réel quelconque
$5y'+3y=0$	$y(x)=Ae^{\frac{-3}{5}x}$, A réel quelconque

Corrigé 3

1) Solution générale de l'équation différentielle $y'+3y=0$: $y(x)=Ae^{-3x}$

2) Solution particulière satisfaisant la condition initiale $y(1)=2$:

$$y(x)=2e^{-3(x-1)}.$$

En effet, $y(1)=2 \Rightarrow Ae^{-3}=2 \Rightarrow A=2e^{3} \Rightarrow y(x)=2e^{3}e^{-3x}=2e^{3-3x}=2e^{-3(x-1)}$

Corrigé 4

Complétons le tableau par l'équation caractéristique :

Equation différentielle (ED)	Equation caractéristique (EC)
$y''+3y'+2y=0$	$r^2+3r+2=0$
$y''-4y'+4y=0$	$r^2-4r+4=0$
$y''+4y'+5y=0$	$r^2+4r+5=0$
$y''+9y=0$	$r^2+9=0$
$y''-4y=0$	$r^2-4=0$
$y''+3y'=0$	$r^2+3r=0$

Corrigé 5

Complétons le tableau :

Equation différentielle (ED)	équation caractéristique (EC)	Δ	Solutions de l'(EC)	Solution générale de l'(ED)
$y''-5y'+6y=0$	$r^2-5r+6=0$	1	$r_1=2; r_2=3$	$y(x)=Ae^{2x}+Be^{3x}$ $A\ ,\ B\in\mathbb{R}$
$y''-6y'+9y=0$	$r^2-6r+9=0$	0	$r_1=r_2=3$	$y(x)=(Ax+B)e^{3x}$, $A\ ,\ B\in\mathbb{R}$
$y''+4y'+13y=0$	$r^2+4r+13=0$	-36	$r_1=2+3i$ $r_2=2-3i$	$y(x)=e^{2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$, $A\ ,\ B\in\mathbb{R}$

Corrigé 6

Complétons le tableau

Equation différentielle (ED)	Solution générale de l'(ED)
$y''-25y=0$	$y(x)=Ae^{5x}+Be^{-5x}$, A , $B\in\mathbb{R}$
$y''+9y=0$	$y(x)=A\cos 3x+B\sin 3x$, A , $B\in\mathbb{R}$
$y''-3y=0$	$y(x)=Ae^{x\sqrt{3}}+Be^{-x\sqrt{3}}$, A , $B\in\mathbb{R}$
$y''+7y=0$	$y(x)=A\cos(x\sqrt{7})+B\sin(x\sqrt{7})$, A , $B\in\mathbb{R}$

Corrigé 7

1) L'équation différentielle $y''+4y'+13y=0$ a pour équation caractéristique $r^2+4r+13=0$.
Le discriminant : $\Delta=16-52=-36$.

Les solutions de l'équation caractéristique : $r_1=\frac{-4+6i}{2}=-2+3i$, et

$r_1=\frac{-4-6i}{2}=-2-3i$.

La solution générale de l'équation différentielle :
$y(x)=e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$, A , $B\in\mathbb{R}$.

2) Si $y(x)=e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$, **alors**
$y'(x)=-2e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+e^{-2x}(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)$.

$$\begin{cases}y(0)=7\\ y'(0)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=7\\ -2A+3B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=7\\ B=\frac{16}{3}\end{cases}.$$

Donc l'unique solution de l'équation différentielle qui vérifie les conditions initiales est $y(x)=e^{-2x}(7\cos 3x+\frac{16}{3}\sin 3x)$.

Corrigé 8

1) On a $f_0(x)=(3-x)e^x \Rightarrow f_0'(x)=-e^x+(3-x)e^x \Rightarrow f_0'(x)=(2-x)e^x$.
On remplace dans l'équation différentielle complète (E) :
On obtient : $f_0'(x)-f_0(x)=(2-x)e^x-(3-x)e^x=-e^x$.
Alors la fonction $f_0(x)=(3-x)e^x$ est bien solution de l'équation différentielle (E) : $y'-y=-e^x$.

2) L'équation différentielle $y'-y=0$ est une équation différentielle homogène de premier ordre ayant pour solution générale les fonctions du type : $x \mapsto Ae^x$, où A est un réel quelconque.

3) <u>Si f est une solution</u> de l'équation complète, alors :

$$\begin{cases} f'-f=-e^x \\ f_0'-f_0=-e^x \end{cases} \Rightarrow f'-f_0'-f+f_0=0 \Rightarrow \left(f-f_0\right)'-\left(f-f_0\right)=0$$

Donc $f-f_0$ est solution de $\left(E_0\right)$.
<u>Réciproquement</u>, si $f-f_0$ est solution de $\left(E_0\right)$ alors $\left(f-f_0\right)'-\left(f-f_0\right)=0$.
Donc $f'-f=f_0'-f_0$. C'est-à-dire que $f'-f=-e^x$ car f_0 est une solution de l'équation différentielle (E) : $y'-y=-e^x$. Ce qui montre que f est une solution de l'équation différentielle complète (E).
<u>Conclusion</u> : Une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f-f_0$ est solution de $\left(E_0\right)$.

4) D'après ce qui précède, on déduit que f est solution de (E) si et seulement si $f(x)-f_0(x)=Ae^x$, où A est un réel quelconque.
Donc $f(x)=f_0(x)+Ae^x$
$f(x)=(3-x)e^x+Ae^x$
$f(x)=(A+3-x)e^x$
$f(x)=(B-x)e^x$, où B est un réel quelconque.

Conclusion :

Solution générale de l'équation différentielle (E) : $x \mapsto (B-x)e^{x}$, où B est un réel quelconque.

Corrigé 9

Complétons le tableau :

Equation différentielle avec second membre (E)	Equation homogène associée : (E_0)
$y'+2y=e^{x}$	$y'+2y=0$
$y'-3y=7$	$y'-3y=0$
$4y'+5y=x^2+2x+3$	$4y'+5y=0$
$y''-4y'+5y=2x+e^{x}$	$y''-4y'+5y=0$
$y''-9y=\cos x$	$y''-9y=0$

Corrigé 10

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

1) L'équation homogène associée est (E_0) : $y'-3y=0$

La solution générale de (E_0) est l'ensemble des fonctions du type : $x \mapsto Ae^{3x}$ où $A \in \mathbb{R}$.

2) Déterminons les réels a, b et c tels que la fonction $y_0(x)=ax^2+bx+c$ soit une solution particulière de (E) :

On a $y_0'(x)=2ax+b$.

y_0 est une solution particulière de (E) si et seulement si pour tout réel x on a : $y_0'(x)-3y(x)=x^2$

$$\Leftrightarrow 2ax+b-3(ax^2+bx+c)=x^2$$

$$\Leftrightarrow -3ax^2+(2a-3b)x+b-3c=x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = 0 \\ b - 3c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{2}{9} \\ c = -\dfrac{2}{27} \end{cases}$$

Ainsi, on trouve que $y_0(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}$ convient.

3) Les solutions de l'équation différentielle (E) avec second membre sont obtenues en faisant la somme de la solution particulière $y_0(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}$ et de la solution générale $x \mapsto Ae^{3x}$ où $A \in \mathbb{R}$, de l'équation homogène (E_0). Donc, ce sont les fonctions du type :

$y(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27} + Ae^{3x}$ où A est un paramètre réel.

Corrigé 11

1) Si $f_0(x) = \sin^2 x$, alors :

$f_0'(x) = 2\cos x \sin x$. Soit $f_0'(x) = \sin 2x$, et $f_0''(x) = 2\cos 2x$ soit $f_0''(x) = 2(1 - 2\sin^2 x)$.

(On rappelle que $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ et $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$).

Remplaçons dans l'équation (E) :

$$f_0''(x) - 4f_0'(x) + 4f_0(x) = 2(1 - 2\sin^2 x) - 4(\sin 2x) + 4\sin^2 x$$

$$f_0''(x) - 4f_0'(x) + 4f_0(x) = 2 - 4\sin^2 x - 4\sin 2x + 4\sin^2 x$$

$$f_0''(x) - 4f_0'(x) + 4f_0(x) = 2 - 4\sin 2x$$

$$f_0''(x) - 4f_0'(x) + 4f_0(x) = 2 - 8\sin x \cos x$$

Alors f_0 est bien une solution de (E).

2) L'équation différentielle homogène (E_0) associée est $y''-4y'+4y=0$.

Son équation caractéristique est $r^2-4r+4=0$ a un discriminant nul. Elle admet une solution double $r=2$.
Donc la solution générale de l'équation homogène est du type $x \mapsto (Ax+B)e^{2x}$ où A et B des réels quelconques.

3) On en déduit que les solutions générales de (E) sont les fonctions $y(x)=(Ax+B)e^{2x}+\sin^2 x$, $A,B \in \mathbb{R}$.

Corrigé 12

1) La fonction f est solution de l'équation différentielle : $y'+ky=0$. Elle est de la forme $f(t)=Ae^{-kt}$. A l'instant $t=0$: $f(0)=N_0 \Rightarrow Ae^{-k\times 0}=N_0$ donc $A=N_0$. Par suite : $f(t)=N_0e^{-kt}$:.

2) La demi-vie du carbone 14 est le temps T tel que $f(T)=\frac{1}{2}N_0$

Donc $N_0e^{-kT}=\frac{1}{2}N_0$. Alors $e^{-kT}=\frac{1}{2} \Rightarrow -kT=\ln\frac{1}{2}$

Soit $-kT=-\ln 2$. Donc $T=\frac{\ln 2}{k} \Rightarrow T=\frac{\ln 2}{1,238\times 10^{-4}}$.

Enfin $T \simeq 5599$ ans. (5600 ans environ).

3) Pour calculer l'âge de ces fragments :

$$f(t)=0,4\times N_0 \Leftrightarrow N_0e^{-kt}=0,4\times N_0$$

$$\Leftrightarrow -kt=\ln(0,4)$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\ln(0,4)}{-k}$$

$$\Leftrightarrow t \simeq 7401 \text{ ans, (environ).}$$

Corrigé 13

Par hypothèse, la population y d'une ville évolue à une vitesse y' proportionnelle à elle-même. Donc on a $y' = ay$ où a est le coefficient de proportionnalité. Notons t le temps (en années). On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme : $y(t) = Ae^{at}$ où A est une constante (non nulle, sinon y serait nulle).
Comme la population double tous les dix ans, on a: $y(t+10) = 2y(t)$.
Donc

$$Ae^{a(t+10)} = 2Ae^{at}$$
$$e^{a(t+10)} = 2e^{at}$$
$$e^{10a} = 2$$
$$10a = \ln 2$$
$$\text{D'où : } a = \frac{\ln 2}{10}.$$

$$\text{On a donc : } y(t) = Ae^{\frac{\ln 2}{10}t}.$$

Cherchons maintenant le temps T pour lequel, on a : $y(t+T) = 3y(t)$

$$Ae^{\frac{\ln 2}{10}(t+T)} = 3Ae^{\frac{\ln 2}{10}t}.$$

On simplifie par A puis par $e^{\frac{\ln 2}{10}t}$, on obtient $e^{\frac{\ln 2}{10}T} = 3$

$$e^{\frac{\ln 2}{10}T} = 3$$
$$\frac{\ln 2}{10}T = \ln 3$$

$$\text{Soit} \quad T \simeq 15,85.$$

Il faut donc attendre 15 ans, 10 mois et 6 jours (au jours près) pour que cette population triple.

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Compléter le tableau suivant:

Equation différentielle	Solution générale
$y'+7y=0$	
$y'-4y=0$	
$5y'+7y=0$	
$5y'-2y=0$	
$y'=9y$	
$2y'=7y$	
$y'=0$	

Exercice 2

1) Donner la solution générale de l'équation différentielle $y'+6y=0$.

2) Donner la solution particulière qui vérifie la condition $y(5)=8$.

Exercice 3

Compléter le tableau suivant:

Equation différentielle (ED)	équation caractéristique (EC)	Δ	Solutions de l'(EC)	Solution générale de l'(ED)
$y''-7y'+10y=0$				
$y''+6y'+9y=0$				
$y''-6y'+10y=0$				
$y''+5y'+4y=0$				
$y''-8y'=0$				

Exercice 4

Compléter le tableau suivant :

Equation différentielle (ED)	Solution générale de l'(ED)
$y''-16y=0$	
$y''+4y=0$	
$y''-5y=0$	
$9y''+y=0$	

Exercice 5

Vérifier que la fonction $y(x)=(2x+3)e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle $y''(x)+2y'(x)+y(x)=0$.

Exercice 6

1) Donner la solution générale de l'équation $y''-7y'+10y=0$.

2) Donner la solution particulière qui vérifie la condition $y(0)=3$ et $y'(0)=5$.

Exercice 7

1) Donner la solution générale de l'équation différentielle $y''+4y'+4y=0$.

2) Donner la solution particulière dont la courbe admet au point $A(0;4)$ une tangente parallèle à la droite d'équation $y=2x+5$.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

1) Résoudre l'équation sans second membre $(E_0) : y' + y = 0$

2) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = axe^{-x}$.

3) En déduire la solution générale de (E).

Exercice 9

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = \cos x$.

1) Résoudre l'équation sans second membre $(E_0) : y' - y = 0$

2) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = a\cos x + b\sin x$.

3) En déduire la solution générale de (E).

Exercice 10

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + y = \cos x$.

1) Vérifier que la fonction définie par $f_0(x) = \frac{1}{2}x\sin x$ est solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) associée.

3) En déduire les solutions générales de (E).

Exercice 11

On considère l'équation différentielle (E) : $y''-2y'+y=e^x$.

1) Résoudre l'équation sans second membre (E_0).

2) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.

3) En déduire la solution générale de (E).

Exercice 12

Soit (E) l'équation différentielle $y'-y=-e^x$ et (Eo) : $y'-y=0$.

1) Vérifier que la fonction définie par $f(x)=(3-x)e^x$ est solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle (Eo).

3) Montrer que la fonction u est solution de (E) si et seulement si $u-u_0$ est solution de (Eo).

4) En déduire les solutions de (E).

5) Déterminer la solution f de (E) qui s'annule en 1

Exercice 13

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : *"la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant"*.

On suppose que la température de l'air ambiant est constante égale à 25°C.

Dans ces conditions, la température d'un corps passe de 100°C à 70°C en 15 minutes.

Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40°C ?

Exercice 14 (Traduit)

Dissolution d'une substance **Une substance se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. À l'instant $t = 0$ (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, donner une expression de la quantité dissoute f(t), en grammes, en fonction de t.**	**ذوبان مادة** **تذوب مادة في الماء ونقبل أن سرعة ذوبانها تتناسب مع كميتها غير الذائبة.** **في اللحظة $t = 0$ (الزمن بالدقائق) نضع 20 غراما من هذه المادة في كمية كبيرة من الماء.** **علما بأن الغرامات العشرة الأولى تم ذوبانها خلال خمس دقائق، أعط عبارة الكمية الذائبة بالغرام f(t) بدلالة t .**

02_Maths SN 2 Inner.indd 148 15/02/21 1:48 pm

CHAPITRE 8 : PROBABILITES

I. RESUME DE COURS

A) Probabilité sur un ensemble fini

1)Vocabulaire

Expérience aléatoire	**Une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues**
Eventualités	**Issues d'une expérience aléatoire**
Univers	**L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire. En général, on le note Ω**
Evénement	**toute partie de l'univers . Un événement A est inclus dans l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$)**
Cardinal de A: cardA	**nombre d'éventualités qui composent A**
Evénement élémentaire	**événement réduit à une seule éventualité**
Evénement impossible : $A = \varnothing$	**événement qui ne se réalise jamais**
Evénement certain : $A = \Omega$	**événement qui se réalise toujours**
C est la réunion de A et de B : $C = A \cup B$ (on dit A ou B)	**C est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B**
C est l'intersection de A et de B : $C = A \cap B$	**C est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps.**
A et B sont disjoints ou incompatibles $A \cap B = \varnothing$	**A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ;**
A et B sont contraires ou complémentaires. $B = \overline{A}$ $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$	**B est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A .**

2) Définition

Définir une probabilité sur un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) compris entre 0 et 1 de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$
- **La probabilité d'un événement A, notée p (A) , est la somme des probabilités p_i des éventualités (événements élémentaires) qui constituent A.**

3) Propriétés

Soit A et B deux événements d'un univers Ω, alors :

- **Pour toute éventualité w_i on a : $0 \leq p_i \leq 1$**
- **La probabilité de l'événement certain est 1 ;** $p(\Omega) = 1$
- **La probabilité de l'événement impossible est 0 ;** $p(\phi) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- $A \cap B = \phi \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ **A et B sont incompatibles.**
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ **, (l'événement contraire de A).**

4) Equiprobabilité

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a <u>équiprobabilité</u>. Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités w_i , on a : $p_i = p(w_i) = \frac{1}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{n}$

On a alors, pour tout événement A : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

B) Probabilité conditionnelle - indépendance

1) Définitions

- **Soit A et B deux événements d'un univers tel que $p(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B lorsque nous savons que A s'est produit :**

Probabilité de B sachant A : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

- **A et B sont indépendants si la réalisation de l'événement A est indépendante de celle de l'événement B .**
- **A et B sont indépendants dans chacun des cas suivants (équivalence):**

$p_A(B) = p(B)$	$p_B(A) = p(A)$	$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

2) Propriétés

- $p_A(B)p(A) = p_B(A)p(B)$
- $p_A(B \cup B') = p_A(B) + p_A(B') - p_A(B \cap B')$
- $B \cap B' = \phi \Rightarrow p_A(B \cup B') = p_A(B) + p_A(B')$
- $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A\left(B\right)$

C) Variables aléatoires discrètes

1) Définitions

Soit $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 \dots \omega_n \}$ l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- **On appelle variable aléatoire discrète toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.**
- **L'événement de Ω, noté { X = x }, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.**

L'ensemble $\Omega' = \{ x_1 , x_2 \dots ,x_m \}$ image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X . C'est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

<u>2) La loi de probabilité de X</u> est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p_i = p(X = x_i)$

x_i	x_1	x_2	…	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	…	p_n

On a alors : $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

<u>3) L'espérance mathématique</u> de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$$

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$$

<u>4) La variance</u> de X :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$$

<u>5) L'écart type</u> de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

<u>6) Loi de Bernoulli</u>

Soit E une épreuve comportant deux issues (Succès et Echec). On note p la probabilité de Succès.

Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 en cas de Succès et 0 sinon. Alors, on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètres p.

On note alors $p(S) = p, \quad p(E) = q = 1 - p$ **. On a** $X(\Omega) = \{0,1\}$

Esperance : $E(X) = p$ **Variance :** $V(X) = p(1-p)$

7) Schéma de Bernoulli

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsqu' on répète, de manière indépendante, n fois une même épreuve de Bernoulli de paramètre p, on dit que l'on fait un schéma de Bernoulli.

8) Loi binomiale

Soit E une épreuve de Bernoulli On note p la probabilité de Succès.

Dans un schéma de Bernoulli, on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès. On dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p.

On a $X(\Omega) = \{0,1,2,....n\}$

Loi de probabilité de X : $\boxed{p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k \in \{0,1....n\}}$

Esperance : $E(X) = np$ **Variance :** $V(X) = npq$

Propriétés

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale :

$$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + ... + P(X = k)$$

$$p(X \geq k) = p(X = k) + p(X = k+1) + ... + p(X = n)$$

$$p(X > k) = 1 - p(X \leq k)$$

D) Variables aléatoires continues

1) Densité de probabilité et espérance mathématique

Définition:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle densité de probabilité sur I toute fonction f telle que :

1) **f est continue sur I.**
2) **f est positive sur I.**
3) $\int_I f(t)dt = 1$

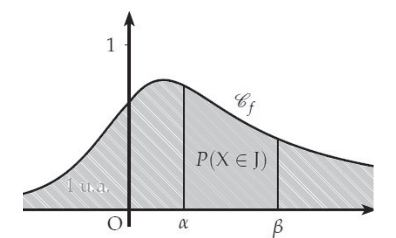
Propriétés :

- ✓ **Pour tout intervalle** $J=[\alpha;\beta]$ **inclus dans** I**, on a :** $p(X\in J)=\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt$

Autrement dit, $p(\alpha\le X\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt$

- ✓ $p(X\in I)=\int_{I}f(t)dt=1$
- ✓ **Pour toute loi continue, pour tout réel c,** $p(X=c)=0$**, donc la probabilité que** X **prenne une valeur isolée est nulle, alors :**
$$p(c\le X\le d)=p(c<X\le d)=p(c\le X<d)=p(c<X<d).$$
- ✓ **Comme la fonction** f **est continue et positive sur I, la probabilité** $p(X\in I)$ **correspond à l'aire sous la courbe** C_f **de f. Elle vaut alors 1 u.a.**
- ✓ **La probabilité** $p(X\in J)$**, avec** $J=[\alpha;\beta]$**, correspond à l'aire du domaine délimité par** C_f**, l'axe des abscisse et les droites d'équation** $x=\alpha$ **et** $x=\beta$**.**

Définition 2 :



L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X**, de densité** f **sur un intervalle** I**, est définie par :**

$$E(X)=\int_{I}tf(t)dt$$

2) Loi uniforme

Définition

Soit $[a,b]$ **un intervalle de** $\mathbb{R}$**. On dit que la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur** $[a,b]$ **si sa densité de probabilité est une fonction constante égale à** $\frac{1}{b-a}$**.**

Propriétés

1. **Pour tout intervalle $I=[c,d]$ inclus dans $[a,b]$, on a :**

$$p(I)=p(c\le X\le d)=\int_c^d \frac{1}{b-a}dt=\frac{d-c}{b-a}$$

2. **La probabilité est donc proportionnelle à la longueur de l'intervalle considéré.**
3. **L'espérance Mathématiques de la loi uniforme de densité f sur $[a;b]$ est : $E(X)=\int_a^b tf(t)dt=\frac{b+a}{2}$.**

<u>3) Loi exponentielle</u>

Définition

La loi exponentielle de paramètre $\lambda\ (\lambda>0)$ est la loi continue dont la densité est définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

Une variable aléatoire X à valeurs dans R^+ suit la loi exponentielle de paramètre λ si, et seulement si,
pour tout $t\ \ge\ 0,\ P(X\ \le\ t)\ =\ 1\ -\ e^{-\lambda t}$

<u>Propriétés</u>:

1) $$\lim_{x\to+\infty} p([0;x])=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-\lambda x}\right)=1$$

(L'aire sous la courbe sur $[0\ ;+\infty[$ est égale à 1).

2) Si a et b sont deux réels positifs tels que $a\le b$ on a

a) $p([a;b])=\int_a^b \lambda e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$;

b) $p([0;a])=\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda a}$ **et**

c) $p([a;+\infty[)=1-p([0;a])=e^{-\lambda a}$

3) Probabilité conditionnelle : Soient t et h deux réels positifs on a :

$$p_{(X \geq t)}\left(X \geq t+h\right) = p\left(X \geq h\right) = e^{-\lambda h}$$

(Cette probabilité ne dépend pas de t et permet de calculer la durée de vie sans vieillissement d'un objet)

4) L'espérance Mathématique de la loi exponentielle de densité f sur $\left[0;+\infty\right[$ est:

$$E(X) = \lim_{x \to \infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Choisir la bonne réponse :

1	**On lance un dé bien équilibré de faces numérotées de 1 à 6. La probabilité d'obtenir un diviseur de 6 est**	
	Réponse A	$\frac{1}{6}$
	Réponse B	$\frac{1}{2}$
	Réponse C	$\frac{2}{3}$
	Réponse D	$\frac{1}{3}$

2	**On lance deux fois de suite un dé bien équilibré de faces numérotées de 1 à 6. La probabilité d'obtenir un double 6 est**	
	Réponse A	$\frac{1}{3}$
	Réponse B	$\frac{1}{2}$
	Réponse C	$\frac{1}{6}$
	Réponse D	$\frac{1}{36}$

3	**Deux événements A et B vérifient $p(A) = 0,3$; $p(B) = 0,4$ et $p(A \cap B) = 0,12$. Alors**	
	Réponse A	**A et B sont indépendants**
	Réponse B	**A et B sont incompatibles**
	Réponse C	$p(A \cup B) = 0,7$
	Réponse D	$p(A \cup B) = 0,88$

4	On lance simultanément quatre pièces équilibrées à Pile ou Face. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois Pile ?	
	Réponse A	$\frac{5}{16}$
	Réponse B	$\frac{3}{16}$
	Réponse C	$\frac{1}{16}$
	Réponse D	$\frac{3}{4}$

5	On lance successivement deux dés équilibrés à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois le même résultat ?	
	Réponse A	$\frac{1}{36}$
	Réponse B	$\frac{1}{6}$
	Réponse C	$\frac{1}{4}$
	Réponse D	$\frac{1}{2}$

6	On donne $p(B) = 0,1$; $p_A(B) = 0,4$ et $p(A) = 0,2$. Alors, $p_B(A) =$	
	Réponse A	0,08
	Réponse B	0,5
	Réponse C	0,4
	Réponse D	0,8

QCM 2

Choisir la bonne réponse :

1	**La probabilité de tirer simultanément 2 boules blanches dans une urne qui contient 3 boules rouges et 4 boules blanches est :**	
	Réponse A	$\frac{2}{7}$
	Réponse B	$\frac{1}{2}$
	Réponse C	$\frac{A_4^2}{A_7^2}$
	Réponse D	$\frac{C_4^2}{C_7^2}$

2	**Soient 2 événements A et B tels que** $p(A) = 0,7;\ P(A \cap B) = 0,4$ **et** $P_B(A) = 0,8$ **. Alors** $p(B) =$	
	Réponse A	**0,5**
	Réponse B	**0,2**
	Réponse C	**0,4**
	Réponse D	**0,1**

3	**Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur** $[2,20]$ **.** **La probabilité** $p_{X>4}(5 \leq X \leq 10)$ **est égale à :**	
	Réponse A	$\frac{1}{2}$
	Réponse B	$\frac{5}{18}$
	Réponse C	$\frac{1}{4}$
	Réponse D	$\frac{5}{16}$

4	**Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et $\mu = E(X)$ son espérance. La probabilité que X soit supérieure à son espérance $E(X)$ est**	
	Réponse A	$\frac{1}{e}$
	Réponse B	$1 - \frac{1}{e}$
	Réponse C	$\frac{1}{2}$
	Réponse D	$\frac{1}{e^{\lambda}}$

5	**Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [14; 16]. $p(X \leq 15,5)$ est égal à :**	
	Réponse A	**0,25**
	Réponse B	**0,50**
	Réponse C	**0,75**
	Réponse D	**0,97**

6	**Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$:**	
	Réponse A	$p(X = 5) = 0,4^5 \times 0,6^5$
	Réponse B	$p(X \geq 1) = 1 - 0,6^{10}$
	Réponse C	$p(X \geq 1) = 1 - 0,4^{10}$
	Réponse D	$p(X \geq 2) = 1 - 0,4^8$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Parmi les 80 filles qui étaient en classe de Terminale au lycée il y a dix ans :

36 sont aujourd'hui salariées ; 39 sont mères de famille ; 15 sont salariées et mères de famille.

On choisit au hasard une de ces 80 femmes.

Considérons les évènements

A : « la femme choisie est salariée »

B : « la femme choisie est mère de famille ».

Quelle est la probabilité pour que la femme ne soit ni salariée ni mère de famille ?

Exercice 2

Une réunion rassemble 20 personnes : 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20% des femmes portent des lunettes ainsi que 40 % des hommes.

1) Une personne prend la parole. Quelle est la probabilité que cette personne porte des lunettes ?

2) Une personne qui porte des lunettes prend la parole. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ?

Exercice 3

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité :

a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?

b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?

c. qu'il ait un test positif ?

d. qu'il ait un test négatif ?

3. Calculer la probabilité :

a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?

b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

4. Interpréter les résultats obtenus aux questions 3. a. et 3. b.

Exercice 4

Une étude médicale a montré que $1\,\%$ d'une population sont atteint d'une maladie M.

Un échantillon de n individus ($n \geq 2$) a été choisi d'une façon aléatoire dans cette population pour être soumis à des tests de dépistage relatifs à la maladie M (on suppose l'équiprobabilité).

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'individus, de cet ensemble, atteints de la maladie M.

1. Déterminer la loi de probabilité de X

2. Calculer en fonction de n la probabilité de chacun des événements suivants :

A « Aucun individu de cet ensemble n'est atteint de la maladie M »

B « Un seul individu de cet ensemble est atteint de la maladie M »

C « Au moins un individu de cet ensemble est atteint de la maladie M ».

3. Soit p_n la probabilité d'avoir au moins un individu de cet échantillon atteint de la maladie M donc $p_n = p(C)$.

a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter le résultat.

b) Quel est le plus petit nombre n d'individus à tester afin d'avoir $p_n \geq 0{,}9$?

Exercice 5

Un comité se compose de 4 hommes et de 3 femmes ; on constitue, de façons aléatoire et simultanée, une équipe de travail composée de trois personnes. On supposera l'équiprobabilité.

1. Quel est le nombre d'équipes que l'on peut constituer ?

2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : L'équipe est constituée uniquement d'hommes.

B : L'équipe est constituée uniquement de femmes.

C : L'équipe est constituée de personnes de même sexe.

D : L'équipe contient une femme au moins.

3. On appelle X la variable aléatoire réelle qui associe chaque tirage par le nombre d'hommes qui sont présent dans cette équipe.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance mathématique E(X).

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2x$. Montrer que f définit bien une fonction de densité sur $[0;1]$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = k x^2$.

1) Déterminer k pour que f définisse une fonction de densité sur $[0;1]$.

2) Soit X une variable aléatoire de densité f, calculer alors $p([0;0,5])$.

Exercice 8

On choisit un nombre réel au hasard entre -3 et 5.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 1?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre supérieur ou égal à 3?

c) Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit strictement inférieur à 1, sachant qu'il est strictement positif ?

Exercice 9

Abdellahi et Brahim se donnent rendez-vous entre 12h et 14h. Proche du lieu fixé, Brahim arrivera assurément à 12h30. Quant à Abdellahi, son arrivée dépend des conditions de circulation routière : il arrivera entre 12h et 13h.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de Abdellahi?

2) Calculer la probabilité que Abdellahi arrive avant Brahim.

3) Calculer la probabilité que Brahim attende Abdellahi plus de 10 minutes.

Exercice 10

La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,00005.

1) Déterminer la probabilité que ce composant :

a) tombe en panne avant 10000 heures,

b) fonctionne au moins 15000 heures,

c) tombe en panne entre la 10000ème heure et la 15000ème heure .

2) Quelle est la durée de vie moyenne du composant électronique ?

Exercice 11

Le temps, en heure, nécessaire pour réparer un ordinateur portable suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

a) Quelle est la probabilité que le temps de réparation dépasse deux heures?

b) Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins quatre heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé trois heures ?

Exercice 12

La durée de vie T, en heure, d'un transistor suit une loi exponentielle telle que :

$$p(T \leq 1000) \simeq 0,095$$

a) Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle T en déduire sa valeur moyenne $E(T)$.

b) Calculer la probabilité conditionnelle : $p_{T>1000}(T > 2000)$

c) Déterminer, à 1h près, la durée $t_{1/2}$ telle que : $p(T \leq t_{\frac{1}{2}}) = 0,5$.

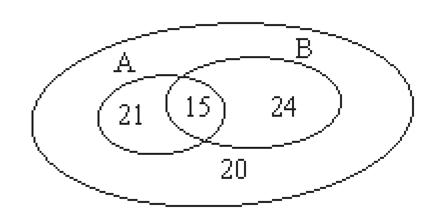
IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

Méthode 1 :

Utilisons le diagramme ci-contre appelé diagramme de Venn.

Le premier nombre placé est 15 qui constitue le cardinal de $A \cap B$.



On en déduit ensuite $21 = 36 - 15$ et $24 = 39 - 15$. La somme de ces trois nombres ($15 + 21 + 24 = 60$) constitue le cardinal de $A \cup B$.

On en déduit enfin que le nombre de femmes qui ne sont ni salariées ni mères de familles est $80 - 60 = 20$.

Comme nous sommes en situation d'équiprobabilité, la probabilité demandée est $\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$.

Méthode 2 :

On peut remarquer que l'événement « la femme choisie n'est ni salariée ni mère de famille » est l'événement contraire de $A \cup B$.

Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{36}{80} + \frac{39}{80} - \frac{15}{80} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$

On en déduit que $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Corrigé 2

1) On note les événements suivants :

H : La personne est un homme

F : La personne est une femme

L : La personne porte des lunettes

On sait que $L = (H \cap L) \cup (F \cap L)$. Alors $\Psi = \{H, F\}$ est un système complet d'événements de l'univers Ω. L est un événement de cet univers.

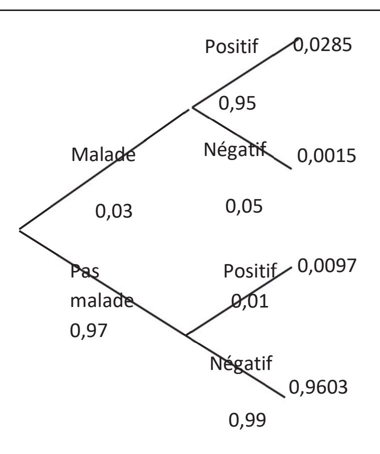
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(L) = P_H(L)P(H) + P_F(L)P(F) = \frac{20}{100} \times \frac{12}{20} + \frac{40}{100} \times \frac{8}{20} = 0,28 .$$

2) Probabilité recherchée : $P_L(F) = \frac{p(F \cap L)}{p(L)} = \frac{0,2 \times 0,6}{0,28} = \frac{0,12}{0,28} \approx 0,43 .$

Corrigé 3

1. **Construction de l'arbre pondéré :**



2. On note *M* l'individu est malade et *T* le test est positif et utilisons l'arbre précédent:

a. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,03 \times 0,95 = 0,0285 .$

b. $P(\bar{M}\cap\bar{T}) = P\left(\overline{M}\right)\times P_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right) = 0,97\times 0,99 = 0,9603$.

c. $P(T) = P(\bar{M}\cap T) + P(M\cap T) = 0,0097 + 0,0285 = 0,0382$.

d. $P(\bar{T}) = P(\bar{M}\cap\bar{T}) + P(M\cap\bar{T}) = 0,0015 + 0,9603 = 0,9618$.

3. a. $P_T(\bar{M}) = \dfrac{P(T\cap\bar{M})}{P(T)} = \dfrac{0,0097}{0,0382} \approx 0,25$

$P_{\bar{T}}(M) = \dfrac{P(\bar{T}\cap M)}{P(\bar{T})} = \dfrac{0,0015}{0,9618} \approx 0,00155$.

Corrigé 4

1) La variable aléatoire X est la variable aléatoire de Bernoulli donc la loi de probabilité de X est la loi Binomiale de paramètres $(n,p,q) = (n,\frac{1}{100},\frac{99}{100})$ car :

* Le test d'un individu donne l'une de deux issues :

- L'individu est atteint, que l'on appelle succès, avec la probabilité $p = \dfrac{1}{100}$
- L'individu n'est pas atteint, que l'on appelle echec, avec la probabilité $q = 1 - p = \dfrac{99}{100}$

* Le test est répété n fois de façons identiques et indépendantes (le nombre d'individus de l'échantillon à tester).

Alors la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre d'individus atteints de la maladie M est donnée par la formule :

$$p(X = k) = C_n^k\left(\frac{1}{100}\right)^k\left(\frac{99}{100}\right)^{n-k} \quad \text{où} \quad k\in\{0,1,...,n\}.$$

2.a) La probabilité de l'événement A «Aucun individu de cet ensemble n'est atteint de la maladie M » est la probabilité de l'événement $X=0$:

$$p(A)=p(X=0)=C_n^0\left(\frac{1}{100}\right)^0\left(\frac{99}{100}\right)^n \text{ donc } p(A)=\left(\frac{99}{100}\right)^n ;$$

b) La probabilité de l'événement B « Un seul individu de cet ensemble est atteint de la maladie M » est la probabilité de l'événement $X=1$:

$$p(B)=p(X=1)=C_n^1\left(\frac{1}{100}\right)^1\left(\frac{99}{100}\right)^{n-1} \text{ donc } \quad p(B)=\frac{n}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{n-1} ;$$

c) Remarquons que l'événement C « Au moins un individu de cet ensemble est atteint de la maladie M » est l'événement contraire de l'événement A «Aucun individu de cet ensemble n'est atteint de la maladie M » donc la probabilité de l'événement C est :

$$p(C)=1-p(A)=1-\left(\frac{99}{100}\right)^n .$$

3. Soit p_n la probabilité d'avoir au moins un individu de cet échantillon atteint de la maladie M donc $p_n = p(C)$.

$$\text{a) } \lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{99}{100}\right)^n\right)=1 \text{ ; car } \left(\left|\frac{99}{100}\right|<1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{99}{100}\right)^n=0\right).$$

L'interprétation:

Si le nombre d'individus à tester est suffisamment grand; alors l'événement est presque certain (de probabilité 1).

$$\text{b) On a : } p_n \geq 0,9 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{99}{100}\right)^n \geq 0,9$$

$$p_n \geq 0,9 \Leftrightarrow -\left(\frac{99}{100}\right)^n \geq -0,1$$

$$p_n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{99}{100}\right)^n \leq 0,1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{99}{100}\right)^n \leq \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{99}{100}\right) \le \ln(0,1) \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{99}{100}\right)} \text{ ; car } \ln\left(\frac{99}{100}\right) \le 0$$

$\Leftrightarrow n \ge 229,13 \Leftrightarrow n \ge 230$; car $n \in \mathbb{N}$.

Donc le plus petit nombre n d'individus à tester afin d'avoir $p_n \ge 0,9$ est de 230 individus.

Corrigé 5

1) Le nombre d'équipes que l'on peut constituer est le nombre des sous-ensembles de 3 éléments dans un ensemble de 7 éléments (Tirage simultané de 3 boules d'une urne qui contient 7 boules indiscernables au touché):

$$C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!\times6} = 7\times5 = 35$$

2) Calcul des probabilités des événements A, B, C :

A : ''L'équipe est constituée uniquement d'hommes'' (Le comité contient 4 hommes).

$$p(A) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$$

B : ''L'équipe est constituée uniquement de femmes '' (Le comité contient 3 femmes).

$$p(B) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$$

C : ''L'équipe est constituée de personnes de même sexe''

$$p(C) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_7^3} = \frac{4+1}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

Remarquons que l'événement C est vérifié si l'équipe est constituée uniquement d'hommes ou uniquement de femmes. Alors $C = A \cup B$

$$p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{35} + \frac{1}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

D : ''L'équipe contient une femme au moins''

<u>Méthode 1 :</u>

L'événement D se réalise si l'équipe est constituée de : (une femme et zéro homme) ou (deux femmes et un homme) ou (trois femmes) et sa probabilité est :

$$p(D) = \frac{C_3^1 \times C_4^2 + C_3^2 \times C_4^1 + C_3^3}{C_7^3} = \frac{18+12+1}{35} = \frac{31}{35}$$

<u>Méthode 2 :</u>

Remarquons que l'événement contraire de l'événement D est : ''l'équipe ne contient aucune femme''. Alors ''l'équipe est constituée uniquement d'hommes''. Soit l'événement A. D'où :

$$p(D) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

3. La variable aléatoire réelle X associe à chaque tirage le nombre d'hommes dans cette équipe a) Loi de probabilité de X : l'ensemble de valeurs de X est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

La loi de probabilité de X:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

b) Espérance mathématique :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{60}{35} = \frac{12}{7}.$$

Corrigé 6

Sur $[0;1]$, la fonction f est continue et positive.

De plus $\int_0^1 f(t)dt = \left[t^2\right]_0^1 = 1$.

Donc f définit bien une fonction de densité sur $[0;1]$.

Corrigé 7

1) Sur $[0;1]$, la fonction f est continue et doit être positive avec

$\int_0^1 f(t)dt = 1$ donc

$\int_0^1 kt^2dt = 1$

$\left[\frac{k}{3}t^3\right]_0^1 = 1$ d'où $\frac{k}{3} = 1$. Donc f définit une fonction de densité sur $[0;1]$ si $k = 3$.

2) $p([0;0,5]) = \int_0^{0,5} f(t)dt$

$$p([0;0,5]) = \int_0^{0,5} 3t^2dt$$
$$= \left[t^3\right]_0^{0,5}$$
$$= (0,5)^3$$
$$= 0,125$$

Corrigé 8

a) Le fait de choisir un nombre au hasard entre -3 et 5 est une loi uniforme de densité f défini pour tout $t \in [-3;5]$ par $f(t) = \frac{1}{5-(-3)} = \frac{1}{8}$.

b) La probabilité d'obtenir le nombre supérieur ou égal à 3 est

$$p(X\in[3;5]) = \int_3^5 \frac{1}{8}dt = \frac{5-3}{8} = 0,25.$$

c) La probabilité que le nombre choisi soit strictement inférieur à 1, sachant qu'il est strictement positif est $p_{X>0}(X<1) = \dfrac{p([-3;1[\cap]0;5])}{p(]0;5])}$ **d'où**

$$p_{X>0}(X<1) = \frac{p(]0;1[)}{p(]0;5])} \text{ donc } p_{X>0}(X<1) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}} = 0,2$$

Corrigé 9

1) La variable aléatoire T donnant l'heure d'arrivée de Abdellahi suit une loi uniforme de densité f défini pour tout pour tout $t\in[12;13]$ **par**

$$f(t) = \frac{1}{13-12} = 1.$$

2) La probabilité que Abdellahi arrive avant Brahim est :

$$p(T\in[12;12,5]) = \int_{12}^{12,5} 1dt = \frac{0,5}{1} = 0,5$$

3) La probabilité que Brahim attende Abdellahi plus de 10 minutes est :

$$p\left(\left[12+\frac{40}{60};13\right]\right) = \int_{12+\frac{2}{3}}^{12,5} 1dt = \frac{13-(12+\frac{2}{3})}{1} = \frac{1}{3}.$$

Corrigé 10

1.a) $p(T<10000) = p(T\leq 10000) = 1-e^{-0,00005\times 10000} \simeq 0,40$

b) $p(T \geq 15000) = 1-p(T<15000) = 1-\left(1-e^{-0,00005\times 15000}\right) \simeq 0,47$

c)
$p(10000\leq T\leq 15000) = p(T\leq 15000) - p(T<10000) \simeq 0,47-0,40 \simeq 0,07$

2) On a $E(X) \simeq \dfrac{1}{0,\ 00005} \simeq 20000$ **. On peut donc en conclure que la durée de vie moyenne du composant électronique est de 20000 heures.**

Corrigé 11

On note X cette variable (temps) qui suit une loi exponentielle

a) La probabilité que le temps de réparation dépasse deux heures est :

$p(X \geq 2) = 1 - \int_0^2 e^{-x}dx = e^{-2} \simeq 0,135$.

b) La probabilité qu'une réparation prenne au moins quatre heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé trois heures est :

$p_{X\geq3}(X \geq 4) = p_{X\geq3}(X \geq 3+1) = p(X \geq 1) = e^{-1} \simeq 0,368$

Corrigé 12

a) Déterminons le paramètre λ de la loi exponentielle T en déduire sa valeur moyenne $E(T)$.

On a $P(T \leq 1000) = 0,095$ **équivaut à** $1 - e^{-1000\lambda} = 0,095$ **équivaut à**

$\lambda = \dfrac{-\ln(0,905)}{1000} \simeq 10^{-4}$

b) La probabilité conditionnelle :

$P_{T>1000}(T > 2000) = P_{T>1000}(T > 1000 + 1000) = P(T > 1000)$ **d'où**

$P_{T>1000}(T > 2000) = e^{(-10^{-4})\times1000} = e^{(-10^{-4})\times1000} = e^{-0,1} \simeq 0,9$

c) Déterminons, à 1h près, la durée $t_{1/2}$ telle que : $p(T \leq t_{1/2}) = 0,5$. On a $p(T \leq t_{1/2}) = 0,5$ équivaut à

$1 - e^{-0,0004\times t_{1/2}} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,0004\times t_{1/2}} = 0,5 \Leftrightarrow -0,0004 \times t_{1/2} = \ln(0,5)$ **donc**

$t_{1/2} = \dfrac{-\ln(0,5)}{0,0004} \simeq 1,733$ **donc** $t_{1/2} \simeq 2h$ **à 1h près.**

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Soient A et B deux événements tels que $p(A)=\frac{1}{6}$ et $P\left(A\cup B\right)=\frac{1}{2}$.

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer $P\left(B\right)$.

2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer $P\left(B\right)$.

3. Calculer $P\left(B\right)$ en supposant que l'événement A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé.

Exercice 2

Une classe de 30 élèves âgés de 16, 17 ou 18 ans comprend 21 garçons dont 3 âgés de 16 ans, 15 âgés de 17 ans et 3 âgés de 18 ans; on dénombre d'autre part 5 filles âgées de 18 ans, 3 filles âgées de 17 ans, et une seule de 16 ans.

1) Reproduire et compléter le tableau d'effectifs ci-contre :

Sexe / Age	Garçons	Filles	Totaux
16 ans			
17 ans			
18 ans			
Totaux			

2) On choisit un élève au hasard parmi les 30 élèves. Tous les élèves ont la même probabilité d'être choisis.

Dans ce qui suit, les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: « L'élève choisi a 17 ans » ;

B « L'élève choisi est une fille » ;

C « L'élève choisi est une fille de 17 ans ».

b) Définir par une phrase en français les événements : $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.

Exercice 3

Parmi les élèves d'un lycée, 64 % aiment le thé, 28 % aiment le café et 15% aiment les deux.

On interroge un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il :

A) Aime le thé mais pas le café ?

B) Aime le café mais pas le thé ?

C) Aime un seul des deux ?

D) N'aime ni le thé, ni le café ?

Exercice 4

Une boîte contient 5 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules jaunes. On tire simultanément 3 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Calculez la probabilité d'obtenir :

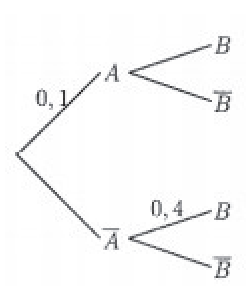
a. Les trois boules ont la même couleur.

b. Les trois boules sont deux à deux de couleurs différentes.

c. Le tirage contient exactement deux couleurs.

Exercice 5

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre :



On donne $p(B) = 0,38$.

1) Compléter les pondérations.

2) Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.

Exercice 6

Un livre contient 5 erreurs, numérotées de 1 à 5, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. **Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?**
2. **Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?**

Exercice 7

On considère une urne contenant 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit noire, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice 8

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 75 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 7% des ampoules présentent un défaut ;

- à la sortie de la machine B, 3% des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;

- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;

- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1) On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.

b) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,94.

c) L'ampoule tirée est sans défaut. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2) On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

3) Dans cette question, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10000.

a) Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

b) Calculer la probabilité $p(T \geq 5000)$.

c) Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 6000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12000 heures.

Exercice 9

La durée de vie d'un appareil électronique est une variable aléatoire X , exprimée en heures, qui suit une loi exponentielle de paramètre 0.00026.

1) Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit de 1000 heures au maximum ?

2) En déduire la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit d'au moins1000 heures.

3) Sachant que la durée de vie de l'appareil a dépassé 1000 heures, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 2000 heures ?

4) Sachant que l'appareil a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ?

Exercice 10

Un groupe de 100 candidats ont passé un test d'inscription dans un centre de formation professionnelle.

Le test est composé de deux épreuves obligatoires : une écrite et une orale.

Les résultats ont montré que : 60 candidats ont réussi l'épreuve écrite dont 45 ont réussi aussi l'épreuve orale.

Parmi ceux qui ont échoué dans l'épreuve écrite 25 % ont réussi l'épreuve orale.

On choisit au hasard un candidat de ce groupe et on considère les évènements suivants :

A : « le candidat a réussi l'épreuve écrite» ; B : « le candidat a réussi l'épreuve orale».

Pour chacune des questions de cet exercice, une seule des trois réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La probabilité $p(A)$ est	0.6	0.45	0.25
2	La probabilité $p(A \cap B)$ est	0.6	0.45	0.25
3	La probabilité $p_A(B)$ est	0.75	0.45	0.25
4	La probabilité $p_{\overline{A}}(B)$ est	0.75	0.45	0.25
5	la probabilité $p(B)$ est	0.75	0.55	0.1

La durée de l'épreuve écrite varie de 20 à 60 minutes. On suppose que le temps X, exprimé en minutes, mis par un candidat avant de remettre sa copie, lors de cette épreuve, est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

6	La fonction de densité de X est	$f(x)=\frac{1}{20}$	$f(x)=\frac{1}{40}$	$f(x)=\frac{1}{60}$

7	La probabilité que ce candidat remet sa copie après 30 minutes est	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.

Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6	7
Réponse							

Exercice 11 (Traduit)

Dans une usine deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier A fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier B. Le pourcentage de pièces défectueuses est 4% pour l'atelier A et 5% pour l'atelier B. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants : **A: La pièce provienne de l'atelier A;** **B: La pièce provienne de l'atelier B;** **D: La pièce est défectueuse ;** **C : La pièce provienne de l'atelier A et est défectueuse ;** **E : La pièce provienne de l'atelier B sachant qu'elle est défectueuse.**	**في مصنع توجد ورشتان A وB لإنتاج نفس النوع من القطع.** **في كل يوم تنتج الورشة A ضعف عدد القطع التي تنتج الورشة B .** **النسبة المئوية للقطع المعيبة هي 4% في الورشة A و 5% في الورشة B.** **نسحب عشوائيا قطعة من إنتاج المصنع في يوم معين.** **حدد احتمال كل من الأحداث التالية:** **A: القطعة من إنتاج الورشة A ؛** **B: القطعة من إنتاج الورشة B ؛** **D: القطعة معيبة؛** **C: القطعة معيبة ومن إنتاج الورشة A؛** **E: القطعة من إنتاج الورشة B علما بأنها معيبة.**

Dépôt légal N°2176/2020

Bibliothèque nationale

Nouakchott

COLLECTION



Accompagnement au Bac

Dans les ouvrages de la collection ESSEBIL AU BAC- Mathématiques vous trouverez :

ESSEBIL AU BAC - Mathématiques

- ✓ **Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules**
- ✓ **Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme**
- ✓ **Des exercices corrigés variés et progressifs pour tester et approfondir vos connaissances**
- ✓ **Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac.**
- ✓ **Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.**